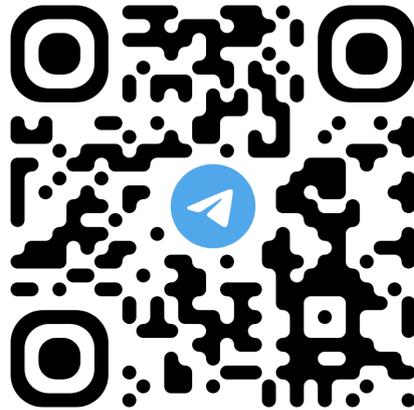


Università di Pisa - Dipartimento di Matematica

## Geometria e Topologia Differenziale

MATTIA SALVADORI

[m.salvadori23@studenti.unipi.it](mailto:m.salvadori23@studenti.unipi.it)



Rielaborazione delle lezioni del professore  
P. Lisca

a.a. 2022/2023



<b>Prefazione</b>	<b>v</b>
<b>I Curve e Superfici</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria delle Curve</b>	<b>3</b>
1.1 Prime definizioni . . . . .	3
1.2 Riferimento di Frenet . . . . .	5
<b>2 Teoria delle Superfici</b>	<b>13</b>
2.1 Prime definizioni . . . . .	13
2.1.1 Esempi di Superfici . . . . .	14
<b>3 Curve sulle Superfici</b>	<b>19</b>
3.1 Approcci iniziali . . . . .	19
3.2 Prima Forma Fondamentale . . . . .	20
3.2.1 Area di regioni $R$ . . . . .	22
3.2.2 Orientabilità . . . . .	23
3.2.3 Ulteriori considerazioni sulle orientazioni . . . . .	26
3.2.4 Derivate di curve su superfici . . . . .	27
3.3 Seconda Forma Fondamentale . . . . .	28
3.3.1 Significato geometrico dei valori $\text{II}_P(w, w)$ e $\ w\  = 1$ , con $w \in \mathcal{T}_P\Sigma$ . . . . .	28
3.4 Teorema Egregium di Gauss . . . . .	34
3.5 Trasporto parallelo . . . . .	36
3.6 Geodetiche . . . . .	39
3.6.1 Curvatura normale e curvatura geodetica . . . . .	39
3.6.2 Esistenza locale delle geodetiche . . . . .	40
3.6.3 Minimizzazione delle lunghezze . . . . .	41
3.7 Teorema di Gauss-Bonnet . . . . .	43
<b>II Varietà e Grado</b>	<b>49</b>
<b>4 Teoria delle Varietà</b>	<b>51</b>
4.1 Prime definizioni . . . . .	51
4.1.1 Applicazione di quanto visto . . . . .	55
4.2 Varietà con bordo . . . . .	55

4.2.1	Spazi tangenti . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Teoria del Grado</b>	<b>59</b>
5.1	Grado mod 2 . . . . .	59
5.2	Grado (su $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	61
5.2.1	Orientazione indotta sul bordo . . . . .	62
5.3	Indici di zeri di campi vettoriali . . . . .	68
	<b>Indice Analitico</b>	<b>73</b>

## Prefazione

Questo elaborato comprende tutte le lezioni del corso di **Geometria e Topologia Differenziale** dell'a.a. 2022/2023 tenuto dal suddetto professore.

La stesura di questo elaborato è stata un po' lenta (lo ammetto), ma, al solito, davvero soddisfacente: spero vivamente che vi possa essere utile.

Certamente ringrazio SABRINA BOTTICCHIO che è stata fondamentale con il suo eccellente, puntuale e immancabile lavoro di correzione in itinere di ogni singola pagina, ma anche ANDREA ROCCA il quale, oltre ad apportare correzioni, è stato anche l'artista realizzatore dei disegni iniziali lasciando poi il *pennello* a CHIARA LORENZETTI, alias **Picasso per GTD**: sono stati a dir poco eccezionali, perché hanno contribuito egregiamente con dei disegni davvero efficaci e molto utili a una maggiore comprensione del testo.

Infine, ci tengo a ringraziare tutti coloro che mi hanno segnalato errori, suggerimenti di modifica per maggiore chiarezza e correzioni varie, tra i quali GIOVANNI MARZENTA ha spiccato eccellentemente: grazie davvero!

Se ci fosse qualcos'altro da cambiare e/o riscrivere, gradirei tantissimo che me lo segnalaste così da rendere queste dispense il più corrette possibile.

Non mi resta che augurarvi...

Buona lettura!

*Mattia*



Parte I

**Curve e Superfici**



## 1.1 Prime definizioni

**Definizione 1.1.1.** Una **curva parametrizzata** è un'applicazione  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^\infty$ , dove  $I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  (aperto, chiuso, ecc...), in cui, se  $I$  non è aperto, allora  $\alpha$  si estende ad un aperto  $A \supset I$ . Per  $t \in I$ , possiamo scrivere esplicitamente in componenti

$$\alpha(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

dove, ovviamente,  $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sono  $C^\infty$ .

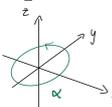
La **traccia** di  $\alpha$  è  $\text{traccia}(\alpha) = \alpha(I) = \text{img}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

è il **vettore velocità** e dunque  $\|\alpha'(t)\|$  è la **velocità** di  $\alpha$  in  $\alpha(t)$ .

**Esempio 1.** Dati  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  tali che  $P \neq Q$ , la **retta parametrizzata** è  $\alpha(t) := P + t\vec{PQ}$ . La sua traccia è la retta affine che passa per  $P$  e  $Q$ .  $\alpha'(t) = \vec{PQ}$  e  $\|\alpha'(t)\| = \|\vec{PQ}\|$  sono costanti.

**Esempio 2.** Dato  $a > 0$ , la **circonferenza parametrizzata** è  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ . La traccia di

$\alpha$  è .  $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$  non è costante, mentre  $\|\alpha'(t)\| = a > 0$  lo è.

**Definizione 1.1.2.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva parametrizzata e  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$ , allora  $\alpha$  si dice **regolare**. Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , allora

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

è la corrispondente funzione **lunghezza d'arco**. La **lunghezza di  $\alpha$**  è  $s(b) = \ell(\alpha)$ .

**Esempio 3.** Presa  $\alpha|_{[0, \infty)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ , si ha  $\|\alpha'(t)\| = a$ , dunque  $s(t) = a \int_a^t du = ta$  e perciò  $s(2\pi) = 2\pi a$ .

Dato un intervallo  $[a, b]$ , sia  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  una sua **partizione**  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])$ .

$$\ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \in \mathbb{R}$$

$$\implies \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])} \{\ell(\alpha, \mathcal{P})\} \stackrel{\text{Teo.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(u)\| du$$



Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare. Visto che  $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ ,  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ . Possiamo pensare dunque  $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell]$ . Poiché  $s$  è monotona, ammette inversa  $t : [0, \ell] \rightarrow [a, b]$ . Si ha perciò la funzione  $\beta = \alpha \circ t : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{traccia}(\alpha) = \text{traccia}(\beta)$ ,  $\beta(s) = \alpha(t(s))$  e dunque  $\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ . Quindi  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Definizione 1.1.3.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva e  $\|\alpha'(t)\| = 1 \forall t \in I$ , allora si dice che è **parametrizzata tramite lunghezza d'arco (p.l.a.)**.

Abbiamo verificato che ogni curva regolare è riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco.

**Esempio 4 (Eliche).** Dato  $a > 0$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, z) \mapsto (a \cos u, a \sin u, z)$  è un cilindro di raggio  $a$  attorno all'asse  $z$ . Dato  $b > 0$  e presi i punti  $\{(t, bt)\}$  (retta passante per l'origine),

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

è l'**elica destrorsa** (perché  $b > 0$ , altrimenti **sinistrorsa**) di raggio  $a$  e passo  $b$ .

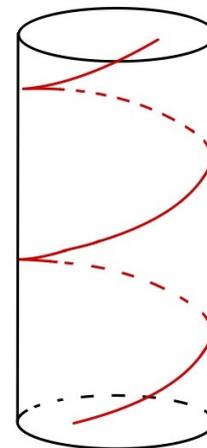
$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

perciò  $\alpha$  è regolare. Se  $\alpha|_{[0, \infty)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , allora

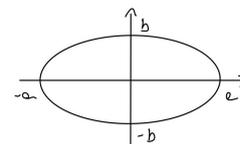
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s) \sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Dunque  $\beta$  è p.l.a. e  $\beta(\mathbb{R}) = \text{traccia}(\beta) = \text{traccia}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$ .

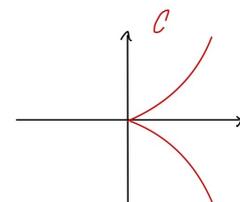


**Esempio 5.** Dati  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Vorremmo  $\alpha$  tale che  $\text{traccia}(\alpha) = \mathcal{E}_{a,b}$ :  $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in S^1$  <sup>a</sup>, cioè  $\frac{x}{a} = \cos t$  e  $\frac{y}{b} = \sin t$ , con  $t \in [0, 2\pi)$ . Dunque  $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$  è parametrizzata con  $\text{traccia}(\alpha) = \mathcal{E}_{a,b}$ .



<sup>a</sup> $S^1$  è la circonferenza unitaria.

**Esempio 6.** Sia  $\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ : vorremmo  $\alpha$  tale che  $\text{traccia}(\alpha) = \mathcal{C}$ : se consideriamo la secante  $y = tx$ , allora  $t^2 x^2 = x^3$ , cioè  $x = t^2$ , e  $y = t^3$ , ossia  $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ .



**Esercizio 1.** Sia  $\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \mid y^2 = x^3 + x^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ : vorremmo  $\alpha$  curva parametrizzata tale che  $\text{traccia}(\alpha) = \mathcal{C}$ : se  $t = \frac{y}{x}$ , con  $x \neq 0$ , allora... (proseguire per **Esercizio**).

**Lemma 1.1.1.** Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , allora  $(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$ .

*Dimostrazione.* Possiamo scrivere  $f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$ , perciò

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^3 [f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)] \quad \square$$

Data  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva p.l.a., poiché  $\|\beta'(s)\| = 1$ , sicuramente  $\beta'(s) \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ . D'ora in poi lo chiameremo **versore tangente**  $T(s) := \beta'(s)$ .

**Fatto 1.1.2.** Se  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva p.l.a., allora  $T'(s) \cdot T(s) = 0$ .

*Dimostrazione.* Infatti,  $\forall s \ T(s) \cdot T(s) \equiv 1$ . Per il **Lemma 1.1.1**,  $2T'(s) \cdot T(s) = (T(s) \cdot T(s))' = 0$ .  $\square$

**Definizione 1.1.4.** Se  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è p.l.a. e  $T(s)$  è il suo versore tangente, allora  $k(s) = \|T'(s)\|$  è la **curvatura** di  $\beta$  in  $\beta(s)$ .

## 1.2 Riferimento di Frenet

**Definizione 1.2.1.** Una curva regolare  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **di Frenet**, se la sua versione p.l.a.  $\beta : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha curvatura  $k(s) > 0 \ \forall s \in [0, \ell]$ .

**Osservazione 1.** Se  $\alpha$  è p.l.a., allora  $\alpha = \beta$ .

Il versore tangente  $T(s)$  di una curva di Frenet è tale che

$$\boxed{T'(s) = k(s) \cdot N(s)}, \quad \|N(s)\| = 1 \quad \text{e} \quad N(s) \perp T(s) \quad \text{^1} \quad \text{(Prima equazione di Frenet)}$$

**Definizione 1.2.2.**  $N(s)$  è il **versore normale principale** e  $B(s) := T(s) \times N(s)$  è il **versore binormale**.

Dati  $x, y \in \mathbb{R}^3$  ortogonali e di norma 1,

$$\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin \frac{\pi}{2} = \|x\| \|y\| = 1$$

Dunque anche  $\|B(s)\| = 1$ . Inoltre,  $T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s) \equiv 0$ .

**Riassumendo:**  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva di Frenet  $\xrightarrow{\text{Lemma 1.1.1}}$   $(T(s), N(s), B(s))$  è base ortonormale di  $\mathbb{R}^3 \ \forall s \in I$ , detta **Riferimento di Frenet**.

Poiché è un versore,  $N(s) \cdot N(s) \equiv 1 \implies N'(s) \cdot N(s) \equiv 0$ , cioè  $N'(s) \in \langle T(s), B(s) \rangle$ .

Visto che  $T(s) \cdot N(s) \equiv 0$ ,  $\underbrace{T'(s) \cdot N(s)}_{k(s) \cdot N(s) \cdot N(s)} + T(s) \cdot N'(s) \equiv 0$ , dunque  $\exists \tau(s)$  tale che

$$\boxed{N'(s) = -k(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s)} \quad \text{(Seconda equazione di Frenet)}$$

**Definizione 1.2.3.**  $\tau(s)$  è la **torsione** di  $\beta$  in  $\beta(s)$ .

Come prima,  $B(s) \cdot B(s) \equiv 1 \implies B'(s) \cdot B(s) \equiv 0$ , cioè  $B'(s) \in \langle T(s), N(s) \rangle$ .

Poiché  $N(s) \cdot B(s) = 0$ , derivando  $T(s) \cdot B(s) \equiv 0$ , si ha  $\underbrace{T'(s) \cdot B(s)}_{k(s)N(s)} + T(s) \cdot B'(s) \equiv 0$  e perciò

$B'(s) \in \langle N(s) \rangle$ .

Visto che  $T(s) \cdot B(s) = 0$ , derivando  $N(s) \cdot B(s) \equiv 0$ , si ha  $\underbrace{N'(s)}_{-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)} \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) \equiv 0$ , cioè

$$\boxed{B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s)} \quad \text{(Terza equazione di Frenet)}$$

<sup>1</sup>Perché  $N \perp T'$  e abbiamo visto che  $T' \perp T$ .

$$\begin{cases} T'(s) = k(s) \cdot N(s) \\ N'(s) = -k(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s) \\ B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s) \end{cases} \quad \text{Sistema di equazioni di Frenet}$$

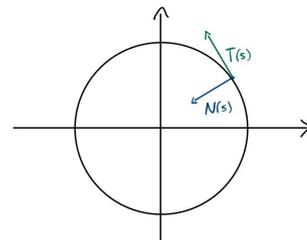
**Esempio 7.** Sia  $\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$ , con  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  e  $P \neq Q$ , una retta parametrizzata:  $\alpha'(t) \equiv \overrightarrow{PQ}$ , quindi è regolare,  $T(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ ,  $s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{PQ}\| du = t\|\overrightarrow{PQ}\| \implies t = \frac{s}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ , dunque  $\beta(s) = P + s \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ ,  $T(s) = \beta'(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \implies T'(s) \equiv 0 \implies k(s) \equiv 0$ . Perciò  $\alpha$  non è di Frenet (e neanche  $\beta$ ).

**Esempio 8.** Dato  $a > 0$ , sia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$  una circonferenza parametrizzata. Se la interpretiamo come un'elica con  $b = 0$ , allora, usando quanto già trovato sulla forma p.l.a. delle eliche,

$$\beta(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{a} \right), a \sin \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right) \implies T(s) = \left( -\sin \left( \frac{s}{a} \right), \cos \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right)$$

$$\implies T'(s) = \underbrace{\frac{1}{a}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos \left( \frac{s}{a} \right), -\sin \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right)}_{N(s)}^a$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} -\sin \left( \frac{s}{a} \right) \\ \cos \left( \frac{s}{a} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \left( \frac{s}{a} \right) \\ -\sin \left( \frac{s}{a} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \underbrace{B'(s)}_{-\tau(s)N(s)} \equiv 0 \implies \tau(s) \equiv 0$$



<sup>a</sup> $(-\cos(\frac{s}{a}), -\sin(\frac{s}{a}), 0) = N(s)$  perché è un versore.

**Esempio 9.** Sia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  l'elica parametrizzata di raggio  $a > 0$  e passo  $b \in \mathbb{R}$ . Abbiamo già ricavato la versione p.l.a., detto  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$\beta(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{c} \right), a \sin \left( \frac{s}{c} \right), \frac{b}{c}s \right) \implies T(s) = \frac{1}{c} \left( -a \sin \left( \frac{s}{c} \right), a \cos \left( \frac{s}{c} \right), b \right)$$

$$\implies T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos \left( \frac{s}{c} \right), -\sin \left( \frac{s}{c} \right), 0 \right)}_{N(s)}$$

cioè  $N(s)$  è perpendicolare all'asse  $z$  e punta verso di esso.

$$B(s) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -a \sin \left( \frac{s}{c} \right) \\ a \cos \left( \frac{s}{c} \right) \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \left( \frac{s}{c} \right) \\ -\sin \left( \frac{s}{c} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \left( b \sin \left( \frac{s}{c} \right), -b \cos \left( \frac{s}{c} \right), a \right)$$

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \implies \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{1}{c} \left( \sin \left( \frac{s}{c} \right), -\cos \left( \frac{s}{c} \right), 0 \right) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

$$b > 0 \iff \text{elica destrorsa} \iff \tau(s) > 0.$$

$$b < 0 \iff \text{elica sinistrorsa} \iff \tau(s) < 0.$$

$$b = 0 \iff \text{circonferenza} \iff \tau(s) \equiv 0 \text{ e } k(s) \equiv \frac{1}{a}.$$

Fissato  $a$ ,

$$\tau(s) \xrightarrow{b \rightarrow \pm\infty} 0 \quad k(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} \xrightarrow{b \rightarrow \pm\infty} 0$$

**Proposizione 1.2.1.** Data  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regolare,  $k_\alpha \equiv 0 \iff \alpha(I)$  è contenuta in una retta.

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha(I) \subseteq P + \langle v \rangle$ , per un certo vettore  $v$  (senza perdita di generalità) tale che  $\|v\| = 1$ ,  $J \xleftarrow[\beta]{s} I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ , cioè  $\alpha(I) = \beta(J) \subseteq P + \langle v \rangle$ , dove  $\beta$  è la versione p.l.a. di  $\alpha$ .

$$T(s) = \beta'(s) = {}^2 f(s) \cdot v \equiv v \implies T'(s) \equiv 0 \implies k_\beta(s) \equiv 0$$

( $\implies$ )  $\|T'(s)\| = k(s) \equiv 0 \implies T(s) = \beta'(s) \equiv v$ , per un certo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

$\beta'(s) \equiv v \implies \beta(s) = s \cdot v + \beta(0) \in \langle v \rangle + \beta(0)$  che è una retta. □

**Esercizio 2.** Sia  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva p.l.a. tale che  $\beta(I) \subseteq S_r^2(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = r\}$ . Mostrare che  $\beta$  è di Frenet, cioè che  $k_\beta(s) > 0 \forall s \in I$ .

*Svolgimento.*  $\beta(I) \subseteq S_r^2(P) \iff (\beta(s) - P) \cdot (\beta(s) - P) = r^2 \forall s$ . Dunque, derivando,

$$T(s) \cdot (\beta(s) - P) \equiv 0 \implies \underbrace{T'(s) \cdot (\beta(s) - P)}_{k(s) \cdot [N(s) \cdot (\beta(s) - P)]} + \underbrace{T(s) \cdot T'(s)}_1 \equiv 0$$

Perciò  $k(s) > 0 \forall s$ . □

**Proposizione 1.2.2.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva di Frenet:

①  $\tau_\alpha \equiv 0 \iff \alpha(I)$  è contenuta in un piano;

② Se vale ①, allora  $k_\alpha$  è costante  $\iff \alpha(I)$  è contenuta in una circonferenza.

*Dimostrazione.* ① ( $\implies$ ) Senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $\alpha$  sia p.l.a., dunque

$$\tau_\alpha \equiv 0 \implies B'_\alpha(s) = -\tau_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s) \equiv 0$$

perciò  $B_\alpha(s) \equiv B_0$ , per qualche  $B_0$  tale che  $\|B_0\| = 1$ .

$$\underbrace{T(s) \cdot B_0}_{\alpha'(s)} \equiv 0 \implies (\alpha(s) \cdot B_0)' \equiv 0$$

quindi  $\alpha(s) \cdot B_0 = c \in \mathbb{R} \implies \alpha(I) \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}}_{\text{piano affine}}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}$  per qualche  $B_0$  tale che  $\|B_0\| = 1$  e  $c \in \mathbb{R}$ , allora  $\alpha(s) \cdot B_0 \equiv c$ . Dunque

$$T(s) \cdot B_0 \equiv 0 \implies k(s) \cdot (N(s) \cdot B_0) \equiv 0 \xrightarrow{k(s) > 0} N(s) \cdot B_0 \equiv 0$$

Visto che  $B_\alpha(s) = T(s) \times N(s)$ , se consideriamo  $I \xrightarrow{s} \mathbb{R}$   $B_0 \cdot B_\alpha(s) \in \{-1, 1\}$  che è continua e  $I$  è connesso, allora  $B_\alpha(s) \equiv \pm B_0 \forall s$ . Quindi

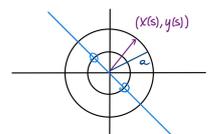
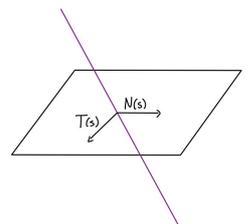
$$B'_\alpha(s) \equiv 0 \implies \tau_\alpha(s) \cdot N(s) \equiv 0 \xrightarrow{N(s) \neq 0} \tau_\alpha(s) \equiv 0$$

② ( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha(I) \subseteq P + \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\text{base ortonormale della giacitura}}$ , allora possiamo supporre che  $P$  sia proprio

il centro della circonferenza (supponiamo di raggio  $a > 0$ ) che contiene  $\alpha(I)$ .

Perciò  $\alpha(s) = P + x(s)v_1 + y(s)v_2$  con  $x(s)^2 + y(s)^2 \equiv a^2 \implies x'(s)x(s) + y'(s)y(s) \equiv 0$

$$\implies T(s) = \alpha'(s) = x'(s)v_1 + y'(s)v_2 \implies 1 \equiv T(s) \cdot T(s) = x'(s)^2 + y'(s)^2$$



<sup>2</sup>Per una certa funzione  $f$  unitaria, cioè  $f \equiv 1$ .

$$\begin{aligned} (x'(s), y'(s)) &= \pm \frac{1}{a} (-y(s), x(s)) \implies (x''(s), y''(s)) = \pm \frac{1}{a} (-y'(s), x'(s)) \\ \implies T'(s) &= \pm \frac{1}{a} \underbrace{(-y'(s)v_1 + x'(s)v_2)}_{\text{versore}} \implies k_\alpha \equiv \|T'(s)\| = \frac{1}{a} > 0 \end{aligned}$$

( $\implies$ ) Da ① sappiamo che  $\alpha$  planare  $\iff \tau_\alpha \equiv 0$ . Se  $k_\alpha = k_0 > 0$ , allora  $\alpha(s) + \frac{1}{k_0}N(s) = P(s)$  vorremmo che fosse costante.

$$P'(s) = T(s) + \frac{1}{k_0}(-k_0T(s) + \tau_\alpha(s)B_\alpha(s)) \equiv 0 \implies \alpha(s) - P_0 = -\frac{1}{k_0}N(s) \implies \|\alpha(s) - P_0\| = \frac{1}{k_0} \quad \square$$

Sia  $\alpha : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  curva p.l.a. di Frenet. Definiamo  $\forall s$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) &= A \cdot \alpha(s) + b, \text{ con } A \in \mathcal{SO}(3) \text{ e } b \in \mathbb{R}^3 \\ \implies \tilde{\alpha}'(s) &= A \cdot T(s) := T_{\tilde{\alpha}}(s) \end{aligned}$$

Dunque anche  $\tilde{\alpha} : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  è p.l.a., perciò

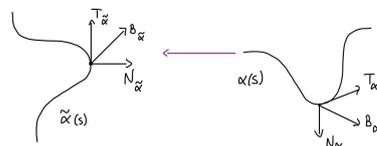
$$\begin{aligned} k_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot N_{\tilde{\alpha}}(s) &= k_\alpha(s) \cdot AN_\alpha(s) \implies k_{\tilde{\alpha}}(s) \equiv k_\alpha(s) \text{ e } N_{\tilde{\alpha}}(s) = AN_\alpha(s) \\ B_{\tilde{\alpha}}(s) &= T_{\tilde{\alpha}}(s) \times N_{\tilde{\alpha}}(s) = (AT_\alpha(s)) \times (AN_\alpha(s)) = A(T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)) = AB_\alpha(s) \\ \implies -\tau_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) &= B'_{\tilde{\alpha}}(s) = AB'_\alpha(s) = -\tau_\alpha \underbrace{AN_\alpha(s)}_{N_{\tilde{\alpha}}(s)} \implies \tau_{\tilde{\alpha}}(s) \equiv \tau_\alpha(s) \end{aligned}$$

### Teorema 1.2.3 (fondamentale della Teoria delle Curve).

Se  $\alpha, \tilde{\alpha} : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  sono curve p.l.a. di Frenet tali che  $k_{\tilde{\alpha}} = k_\alpha$  e  $\tau_{\tilde{\alpha}} = \tau_\alpha$ , allora  $\exists A \in \mathcal{SO}(3)$  e  $b \in \mathbb{R}^3$  tali che  $\tilde{\alpha}(s) = A \cdot \alpha(s) + b \forall s \in [0, \ell]$ .

*Dimostrazione.* Dato che  $(T_\alpha(0), N_\alpha(0), B_\alpha(0))$  e  $(T_{\tilde{\alpha}}(0), N_{\tilde{\alpha}}(0), B_{\tilde{\alpha}}(0))$  sono entrambe basi ortonormali,  $\exists! A \in \mathcal{SO}(3)$  che manda l'una nell'altra.

Definiamo  $b = \tilde{\alpha}(0) - A\alpha(0)$  e poi anche  $\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$ . Vogliamo verificare che  $\tilde{\alpha}$  e  $\alpha^*$  siano la stessa curva. Evidentemente  $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$ ; inoltre



$$\begin{aligned} f(s) &= T_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot T_{\alpha^*}(s) + N_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot N_{\alpha^*}(s) + B_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot B_{\alpha^*}(s) \leq 3 \\ f'(s) &= (k_{\tilde{\alpha}}N_{\tilde{\alpha}} \cdot T_{\alpha^*} + k_{\alpha^*}T_{\tilde{\alpha}} \cdot N_{\alpha^*}) + (-k_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\alpha}} + \tau_{\tilde{\alpha}}B_{\tilde{\alpha}}) \cdot N_{\alpha^*} + \\ &\quad + N_{\tilde{\alpha}} \cdot (-k_{\alpha^*}T_{\alpha^*} + \tau_{\alpha^*} \cdot B_{\alpha^*}) - \tau_{\tilde{\alpha}}N_{\tilde{\alpha}} \cdot B_{\alpha^*} - \tau_{\alpha^*}B_{\tilde{\alpha}} \cdot N_{\alpha^*} \equiv 0 \end{aligned}$$

(I calcoli sono stati omessi e lasciati per **Esercizio**.)

$$\implies f(s) \equiv f(0) = 3 \implies T_{\tilde{\alpha}}(s) \equiv T_{\alpha^*}(s), N_{\tilde{\alpha}}(s) \equiv N_{\alpha^*}(s) \text{ e } B_{\tilde{\alpha}}(s) \equiv B_{\alpha^*}(s)$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0) \\ \tilde{\alpha}'(s) = (\alpha^*)'(s) \quad \forall s \end{cases} \implies \tilde{\alpha}(s) \equiv \alpha^*(s) \quad \square$$

**Esercizio 3.** Se  $\alpha : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva p.l.a. di Frenet tale che  $k_\alpha \equiv k_0 > 0$  e  $\tau_\alpha \equiv \tau_0$  costanti, allora  $\alpha$  parametrizza la porzione di un'elica (generica).

*Svolgimento.* Basta costruire un'elica verticale del tipo

$$\beta(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ con } a > 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Chiamiamo  $k_\beta(s) \equiv \frac{a}{a^2 + b^2}$  e  $\tau_\beta(s) \equiv \frac{b}{a^2 + b^2}$ : vogliamo  $a$  e  $b$  tali che  $\frac{a}{a^2 + b^2} = k_0$  e  $\frac{b}{a^2 + b^2} = \tau_0$ :

$$k_0^2 + \tau_0^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \implies a = \frac{k_0}{k_0^2 + \tau_0^2} > 0 \text{ e } b = \frac{\tau_0}{k_0^2 + \tau_0^2} \quad \square$$

**Esercizio 4** (Compito 20/01/2022). Sia  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione data da

$$\alpha(t) = \left( t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Dimostrare che  $\alpha$  è una curva regolare;
2. Dimostrare che  $\alpha$  è di Frenet e calcolarne la curvatura e il versore normale in ogni punto;
3. Calcolare il versore binormale e la torsione di  $\alpha$  in ogni suo punto.

*Svolgimento.* 1.  $\alpha'(t) = (1, \sqrt{2}t, t^2) \neq (0, 0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$ , dunque  $\alpha$  è regolare.

2. Vorremmo  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  p.l.a. e  $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ .

Definiamo  $s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t (1+u^2) du$ , dunque  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ . Se  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , allora  $\beta'(s(t))s'(t) = \alpha'(t) \implies \beta'(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ .

**Osservazione 2.**  $\beta$  è UNA versione p.l.a. di  $\alpha$ .

Se  $s_a(t) := \int_a^t \|\alpha'(u)\| du = \underbrace{\int_a^0 \|\alpha'(u)\| du}_{c_a} + \underbrace{\int_0^t \|\alpha'(u)\| du}_{s(t)} \implies s_a = s + c_a$ .

$$\beta(s) \rightsquigarrow T(s) = \beta'(s) \rightsquigarrow T'(s) = ?$$

$T(s(t))s'(t) = \alpha'(t)$ , dunque

$$T(s(t)) = \frac{1}{1+t^2}(1, \sqrt{2}t, t^2) \quad \text{versore tangente in } \alpha(t) = \beta(s(t))$$

$$T'(s(t))s'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}(1, \sqrt{2}t, t^2) + \frac{1}{1+t^2}(0, \sqrt{2}, 2t) = \frac{\sqrt{2}}{1+t^2} \underbrace{(-\sqrt{2}t, 1-t^2, \sqrt{2}t)}_{N(s(t))}$$

$$\implies T'(s(t)) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}}_{k_\alpha(s(t))} N(s(t))$$

poiché  $k_\alpha > 0$ ,  $\alpha$  è di Frenet.

3.

$$B(s(t)) = T(s(t)) \times N(s(t)) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}t \\ t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2}t \\ 1-t^2 \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} t^2+t^4 \\ -\sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t \\ t^2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+t^2}(t^2, -\sqrt{2}t, 1) \implies$$

$$B'(s(t))s'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}(t^2, -\sqrt{2}t, 1) + \frac{1}{1+t^2}(2t, -\sqrt{2}, 0) = \frac{-\sqrt{2}}{1+t^2} \underbrace{(-\sqrt{2}t, 1-t^2, \sqrt{2}t)}_{N(s(t))}$$

dunque  $\tau(s(t)) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}$ . □

Vogliamo una formula per la curvatura di una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare non necessariamente p.l.a.. Sia  $\beta(s)$  una versione p.l.a. di  $\alpha$ , quindi tale che  $\beta(s(t)) = \alpha(t) \forall t \in I$  dove  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$  (dunque  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ ). Deriviamo due volte  $\forall t$  la relazione  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T(s(t))s'(t) \\ \alpha''(t) &= T'(s(t))s'(t)^2 + T(s(t))s''(t) = \\ &= k(s(t))N(s(t))\|\alpha'(t)\|^2 + T(s(t))s''(t) \end{aligned}$$

dunque

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = k(s(t)) \underbrace{\|\alpha'(t)\|^3 T(s(t)) \times N(s(t))}_{B(s(t))}$$

$$B(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \implies k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

**Esercizio 5** (Compito 15/11/2021).

Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva di Frenet p.l.a.. Il **cerchio osculatore** di  $\gamma$  in  $\gamma(s_0)$  è il cerchio  $C$  di centro  $P$  e raggio  $R$  contenuto nel piano osculatore della curva  $\gamma$  in  $\gamma(s_0)$ , ovvero il piano affine  $\gamma(s_0) + \langle T(s_0), N(s_0) \rangle$  che “meglio approssima”  $\gamma$  intorno a  $\gamma(s_0)$ , nel senso che valgono le proprietà:

- $\gamma(s_0) \in C$ ;
- posto  $f(s) = \|\gamma(s) - P\|^2 - R^2$ , si ha  $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ .

1. Esprimere  $P$  ed  $R$  in termini di  $\gamma$ ;

2. Sia  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'elica data da

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  e  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sia  $\beta(t)$ , al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , il centro del cerchio osculatore di  $\alpha$  in  $\alpha(t)$ . Dimostrare che  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è anch'essa un'elica e che scegliendo opportunamente il valore di  $a$  in funzione di  $b$  è possibile fare in modo che la traccia di  $\beta$  si ottenga traslando quella di  $\alpha$  nella direzione dell'asse  $z$ .

*Svolgimento.* (1.) Poiché  $f(s) = (\gamma(s) - P)(\gamma(s) - P) - R^2$ ,  $f'(s_0) = 2T(s_0)(\gamma(s_0) - P) = 0$ , dunque  $\gamma(s_0) - P \perp T(s_0) \iff \gamma(s_0) - P \in \langle N(s_0), B(s_0) \rangle$ .

Poiché  $C$  è contenuto nel piano osculatore, anche  $P$  lo è e  $\gamma(s_0) - P \in \langle T(s_0), N(s_0) \rangle$ , dunque si ha  $\gamma(s_0) - P = zN(s_0)$  e perciò  $|z| = R$ . Adesso, derivando di nuovo,

$$f''(s_0) = 2(k(s_0)N(s_0) \underbrace{(\gamma(s_0) - P)}_{zN(s_0)} + \underbrace{T(s_0) \cdot T(s_0)}_1) = 0 \implies$$

$$\implies z \underbrace{k(s_0)}_{>0} + 1 = 0 \implies z = -R \iff k(s_0) = \frac{1}{R} \implies P = \gamma(s_0) + RN(s_0)$$

(2.) Versione p.l.a. di  $\alpha$ :  $\gamma(s) = (a \cos(\frac{s}{c}), a \sin(\frac{s}{c}), s\frac{b}{c})$ , con  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

$$T(s) = \frac{1}{c} \left( -a \sin\left(\frac{s}{c}\right), a \cos\left(\frac{s}{c}\right), b \right) \implies T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)}_{N(s)}$$

In  $\gamma(s)$  il raggio di  $C$  è  $R = \frac{c^2}{a}$  e il centro di  $C$  è

$$\beta(t(s)) = \gamma(s) + \frac{c^2}{a} N(s) = \left( -\frac{b^2}{a} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b^2}{a} \sin\left(\frac{s}{c}\right), s\frac{b}{c} \right) \implies \beta(t) = \left( -\frac{b^2}{a} \cos t, -\frac{b^2}{a} \sin t, bt \right)$$

che evidentemente è un'elica. Scegliamo  $a = |b|$  e otteniamo

$$\beta(t) = (-a \cos t, -a \sin t, bt) = \alpha(t + \pi) - (0, 0, b\pi)$$

□

<sup>3</sup>Ricordando che  $t = \frac{s}{c}$ .

**Esercizio 6** (Compito 15/09/2021).

Sia  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva data da

$$\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  e  $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .

1. Mostrare che  $\alpha$  è regolare e determinare una funzione liscia e invertibile  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^\infty$  e una curva  $\beta$  p.l.a. tali che  $\beta(s(t)) = \alpha(t) \forall t \in \mathbb{R}$ ;

2. Calcolare curvatura, torsione e riferimento di Frenet di  $\alpha$  nel punto  $(1, 0, 0)$ .

*Svolgimento.* 1.  $\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1) \neq (0, 0, 0) \forall t \in \mathbb{R} \implies \alpha$  è regolare.

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2} \cosh u du = \sqrt{2} \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}$$

Dunque  $\sinh t = \frac{s}{\sqrt{2}}$  e, da  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ,  $\cosh t = \sqrt{\frac{s^2}{2} + 1}$ , per cui:  $e^{2t} - \sqrt{2}se^t - 1 = 0$

$$e^t = \frac{\sqrt{2}s \pm \sqrt{2s^2 + 4}}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{s^2}{2} + 1}$$

Segue  $t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{s^2}{2} + 1}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$  e perciò

$$\beta(s(t)) = \left(\sqrt{\frac{s^2}{2} + 1}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{s^2}{2} + 1}\right)\right)$$

2.  $\alpha(0) = (1, 0, 0)$  e  $s(0) = 0$ , dunque

$$T(s(t))s'(t) = \alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1) \implies T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

$$T'(s(t))s'(t)^2 + T(s(t))s''(t) = \alpha''(t) = (\cosh t, \sinh t, 0) \implies 2k(0)N(0) = (1, 0, 0)$$

perciò  $k(0) = \frac{1}{2}$  e  $N(0) = (1, 0, 0)$ .

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

Vogliamo usare la terza equazione di Frenet  $\tau = N' \cdot B$ .

$$k \cdot N \cdot (s')^2 + T \cdot s'' = \alpha'' \implies k \cdot \underbrace{N' \cdot B}_{\tau} \cdot (s')^3 = \alpha''' B$$

dunque

$$\alpha'''(0) \cdot B(0) = (0, 1, 0) \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{2} \tau(0) 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \tau(0) = \frac{1}{2} \quad \square$$



## 2.1 Prime definizioni

Spostiamo la nostra attenzione sugli “oggetti”  $\subseteq \mathbb{R}^3$ .

• Vogliamo mappe  $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^\infty$ .

• Vogliamo  $\underline{x}$  iniettiva: NON VOGLIAMO .

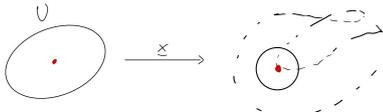
• Non vogliamo neanche punti della superficie come  : in questo caso, ad esempio, non si capisce quale sia il piano tangente nel vertice. Prese le coordinate di  $U$  nella base  $(u, v)$ , se

$$\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

allora indichiamo

$$\begin{cases} \underline{x}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right) = (x_u, y_u, z_u) \\ \underline{x}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right) = (x_v, y_v, z_v) \end{cases}$$

e vogliamo  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0 \forall (u, v) \in U$  il che equivale a  $J\underline{x}$  ha rango 2.

• Non vogliamo nemmeno che: , ossia non vogliamo che il disco si riavvicini

indefinitivamente ad un suo punto, cioè gli intorno del punto non sono mai dei “dischetti”. Possiamo dunque richiedere che:  $\underline{x}^{-1} : \underline{x}(U) \rightarrow U$  sia continua ( $\iff \underline{x} : U \simeq \underline{x}(U)$ ).

**Definizione 2.1.1.**  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mappa  $C^\infty$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, si dice **parametrizzazione regolare** se:

1.  $\underline{x}$  è iniettiva;
2.  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in U$ ;
3.  $\underline{x}^{-1} : \underline{x}(U) \rightarrow U$  è continua.

**Definizione 2.1.2.**  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice **superficie**, se  $\forall P \in \Sigma \exists \underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare tale che  $\underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  è un intorno di  $P$  in  $\Sigma$ .

In particolare, se  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\underline{x}(U)$  è una superficie.

**Esempio 10.** Il grafico di  $f : U \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, è  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ .

Una parametrizzazione regolare è  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)) \quad C^\infty$ : infatti

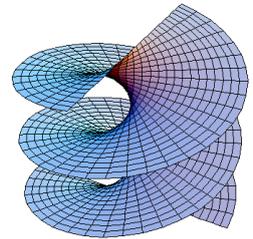
- $\underline{x}(U) = M$ ;
- $\underline{x}$  è iniettiva:  $\underline{x}(u, v) = \underline{x}(u', v') \implies (u, v) = (u', v')$ ;
- $\underline{x}_u = (1, 0, f_u), \underline{x}_v = (0, 1, f_v) \implies \underline{x}_u \times \underline{x}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_u \\ f_v \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;
- $\underline{x}^{-1}: \begin{matrix} \underline{x}(U) = M & \longrightarrow & U \\ (u, v, f(u, v)) & \longmapsto & (u, v) \end{matrix}$  è continua perché restrizione di  $\pi: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y) \end{matrix}$  che è un'applicazione continua.

dunque  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare.

### 2.1.1 Esempi di Superfici

**Esempio 11 (Elicoide).**  $\underline{x}: U = \{(u, v) \mid u > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \longmapsto (u \cos v, u \sin v, bv)$ , con  $b \neq 0$ , è  $C^\infty$ .

Sia  $\varphi: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \longrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{z}{b}\right)$ , dunque  $\varphi \circ \underline{x}(u, v) = (u, v)$ , perciò



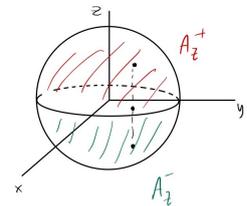
$\underline{x}$  è iniettiva.  $\varphi$  è continua, quindi  $\varphi|_{\underline{x}(U)} = \underline{x}^{-1}$  è continua.

$\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b) \neq (0, 0, 0)$ , visto che  $b \neq 0$ .

$\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v \equiv 0$ , dunque  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  su  $U$ . Quindi  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare e, di conseguenza, l'elicoide è una superficie.

**Esempio 12 (Sfera).** Verifichiamo che la sfera di raggio  $a$   $S_a^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$  sia una superficie. Prendiamo un punto  $(x, y, z) \in S_a^2$  tale che  $z \neq 0$ . Vale  $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$ , perciò considerati il disco aperto di raggio  $a$   $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}$  e la

mappa  $\underline{x}: D_a \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \longmapsto (u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2})$ , si ha  $(x, y, z) \in \underline{x}(D_a)$ . Abbiamo



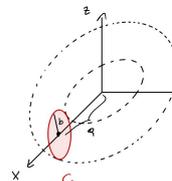
già visto che  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare in quanto grafico (Vedasi vecchio

**Esempio**). Stiamo usando che  $a^2 - u^2 - v^2 \neq 0$ , perciò  $\underline{x}$  è  $C^\infty$ . Se  $z < 0$ , allora prendiamo  $\underline{x}(u, v) = (u, v, -\sqrt{a^2 - u^2 - v^2})$ .

Analogamente, se  $(x, y, z) \in S_a^2$  tale che  $y > 0$ , useremo la mappa  $\underline{x}(u, v) = (u, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}, v)$ , e così via... Dunque, detti  $A_k^+, A_k^-$  gli emisferi, rispettivamente, superiori e inferiori, per  $k = x, y, z$ ,

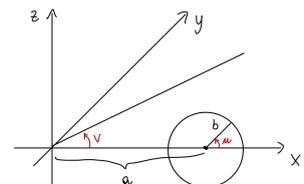
$$S_a^2 = A_z^+ \cup A_z^- \cup A_y^+ \cup A_y^- \cup A_x^+ \cup A_x^- \implies S_a^2 \text{ è una superficie.}$$

**Esempio 13 (Toro).** Fissati  $a > b > 0$ , sia  $\mathbb{T}_{a,b}$  il toro:



ottenuta ruotando la circonferenza  $C$  di raggio  $b$  e centro  $(a, 0, 0)$  intorno all'asse  $z$ .

Se  $\underline{x}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \longmapsto ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ , allora  $\underline{x}(\mathbb{R}^2) =: \mathbb{T}_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Notiamo però che  $\underline{x}$  non è iniettiva, mentre



$$\underline{x}|_{(u_0, u_0 + 2\pi) \times (v_0, v_0 + 2\pi)} \text{ lo è.}$$

Verifichiamo che sia regolare:  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ ?

$$\underline{x}_u = b(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, b \cos u)$$

$$\underline{x}_v = (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0)$$

Visto che  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v = 0 \iff \underline{x}_u \parallel \underline{x}_v$ <sup>1</sup> e  $\underline{x}_v$  appartiene al piano  $xy$ , anche  $\underline{x}_u$  dovrà appartenervi, cioè, in particolare,  $b \cos u = 0 \implies \cos u = 0 \implies \sin u = \pm 1$ , segue che

$$\begin{aligned}\underline{x}_u &= \pm b(\cos v, \sin v, 0) \neq (0, 0, 0) \\ \underline{x}_v &= a(-\sin v, \cos v, 0) \neq (0, 0, 0)\end{aligned}$$

ma quindi  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0 \implies \underline{x}_u \not\parallel \underline{x}_v$ <sup>2</sup>, dunque deve essere  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ .

$\underline{x}^{-1}$  è continua?  $\underline{x}(u_0, v_0) \in \mathbb{T}_{a,b}$ , con, ad esempio,  $(u_0, v_0) \in (0, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  cosicché  $\cos u$  si possa invertire in  $(0, \pi)$  e  $\sin v$  in  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  visto che sono monotòne.

Se  $(u_0, v_0) \in (0, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , allora  $(u, v) = (\underbrace{(a + b \cos u)}_{>0} \cos v, \underbrace{(a + b \cos u)}_{>0} \sin v, \underbrace{b \sin u}_z) \in \mathbb{T}_{a,b}$ ,

$$u = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{b}\right) \quad v = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

dunque  $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}((0,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))}$  è continua. Considerando vari altri casi, otteniamo la continuità  $\forall \underline{x}$ .

**Esempio 14 (Superfici di rotazione).**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$  curva regolare, con

$f(u) > 0 \forall u \in I$ . Mostriamo che  $\underline{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \mapsto (\underbrace{f(u) \cos v}_x, \underbrace{f(u) \sin v}_y, \underbrace{g(u)}_z)$  è una parametrizza-

zione regolare. Nel caso di  $\mathbb{T}_{a,b}$  si ha  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $u \mapsto (a + b \cos u, 0, b \sin u)$ .

Però se  $\alpha(I)$  contenesse due punti che vanno nello stesso? Vogliamo che  $\forall \alpha(u_0) \exists I' \subseteq I$  sotto-intervallo tale che  $\alpha(I') \in I_{\alpha(u_0)}^2$  in  $\alpha(I)$  e  $\alpha|_{I'}$  sia iniettiva.

$$\underline{x}_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \quad \underline{x}_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

dunque  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = f'(u)^2 + g'(u)^2 > 0$ , perché  $\alpha$  è regolare, e  $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = f(u)^2 > 0$ .

Poiché  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$  e sono entrambi non nulli, necessariamente  $\underline{x}_u \perp \underline{x}_v$ , ossia  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ .

Basta dimostrare che  $\underline{x}$  ha inversa continua (da cui segue che, in particolare,  $\underline{x}$  è iniettiva).

Sia  $\underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(I \times \mathbb{R}) \implies (f'(u_0), g'(u_0)) \neq (0, 0)$ , ad esempio,  $f'(u_0) \neq 0 \implies f$  monotòna in un intorno di  $u_0 \implies$  invertibile su  $I'$  intervallino aperto intorno a  $u_0$ .  $\underline{x}(I' \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)) \ni \underline{x}(u_0, v_0)$ .

Se  $\underline{x}(u, v) = (x, y, z) \in \underline{x}(I' \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon))$ , allora  $u = f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Supponendo, ad esempio,  $\cos v$  invertibile,  $v = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ .

**Esercizio 7 (Criterio del gradiente).** Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e fissiamo  $a \in \mathbb{R}$ . Diciamo che  $a$  è un **valore regolare** per  $f$ , se  $f^{-1}(a) = \emptyset$  oppure  $\nabla_P f := (f_x(P), f_y(P), f_z(P)) \neq (0, 0, 0) \forall P \in f^{-1}(a)$ . Dimostrare che, se  $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ , allora  $f^{-1}(a)$  è una superficie.

*Svolgimento.* Sia  $P = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ .  $\nabla_P(f) \neq (0, 0, 0)$  per ipotesi, perciò, senza perdita di generalità, supponiamo che  $f_z(P) \neq 0 \implies \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  intorno di  $(x_0, y_0)$

ed  $\exists ! z : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\begin{cases} z(x_0, y_0) = z_0 \\ f(x, y, z(x, y)) = a \quad \forall (x, y) \in U \end{cases}$   $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \mapsto (u, v, z(u, v))$  è una parametrizzazione regolare e  $\underline{x}(U) \subseteq f^{-1}(a)$  è un intorno di  $P$  in  $f^{-1}(a)$ .  $\square$

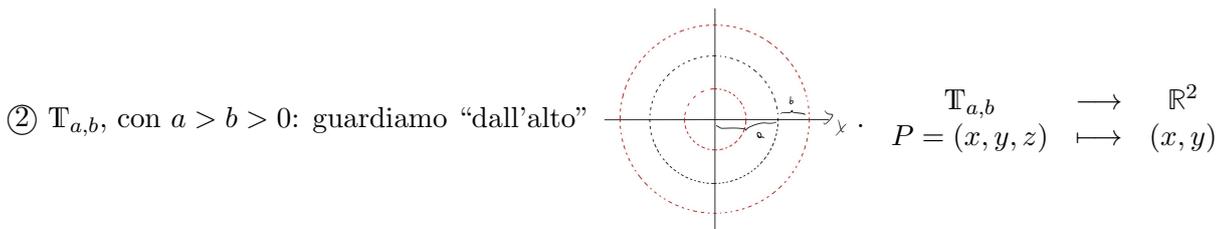
Applicazioni dell'Esercizio 7: ①  $S_a^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ ,  $a > 0 \implies (0, 0, 0) \notin S_a^2$ . Se  $S_a^2 = f^{-1}(a)$ , allora prendiamo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ :

$$\nabla_P f = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \neq 0 \quad \forall P = (x_0, y_0, z_0) \in S_a^2$$

<sup>1</sup>Cioè  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  sono paralleli.

<sup>2</sup> $I_{\alpha(u_0)}$  sono gli intorni di  $\alpha(u_0)$ .

<sup>3</sup>Per il Teorema della funzione implicita.



$$b^2 = (\text{distanza tra } (x, y) \text{ e } Q)^2 + z^2 \iff b^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$$

cioè  $\mathbb{T}_{a,b} = f^{-1}(b^2)$ , dove  $f : \overbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}}^U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $U \supseteq \mathbb{T}_{a,b} = f^{-1}(b^2)$ .  
 $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$

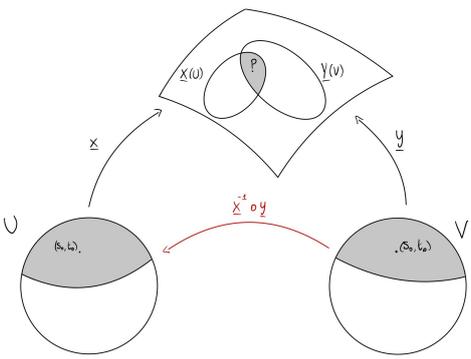
**Esercizio 8.** Applicare il criterio del gradiente per dimostrare (di nuovo) che  $\mathbb{T}_{a,b}$  sia una superficie.

*Svolgimento.* Data  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$ , allora  $\mathbb{T}_{a,b} = f^{-1}(b^2)$ .

$$\nabla f = \left( \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(\sqrt{x^2 + y^2} - a), \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(\sqrt{x^2 + y^2} - a), 2z \right)$$

$(x, y, z) \in f^{-1}(b^2) \iff (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ ,  $\nabla f(x, y, z) = 0 \implies z = 0 \implies \sqrt{x^2 + y^2} = a \pm b \neq a \implies x = y = 0$ , ma  $(0, 0, 0) \notin \mathbb{T}_{a,b}$ , dunque, per il **Criterio del gradiente**,  $\mathbb{T}_{a,b}$  è una superficie.  $\square$

Data una superficie  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , fissiamo un punto  $P \in M$ : esiste una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $P = \underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(U)$ .  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0 \iff \underline{x}_u, \underline{x}_v$  sono linearmente indipendenti e  $\langle \underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0) \rangle$  è un piano: potrebbe dipendere da  $\underline{x}$ ? Cioè, se  $\underline{y}$  è un’altra parametrizzazione regolare in  $P$  e  $P = \underline{x}(u_0, v_0) = \underline{y}(s_0, t_0)$ . Su un intorno del punto  $(s_0, t_0)$  è ben definita la mappa  $(\underline{x}^{-1} \circ \underline{y})(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ .  $u(s, t), v(s, t)$  sono  $C^\infty$ ?



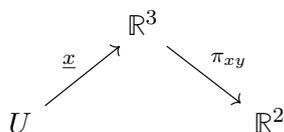
Supponiamo di sì:  $\underline{y}(s, t) = \underline{x}(u(s, t), v(s, t)) \forall s, t \in \underline{y}^{-1}(\underline{x}(U))$ .

Domanda:  $\langle \underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0) \rangle \stackrel{?}{=} \langle \underline{y}_s(s_0, t_0), \underline{y}_t(s_0, t_0) \rangle$

$$\begin{cases} \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v \\ \underline{y}_t = u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v \end{cases} \implies \langle \underline{y}_s, \underline{y}_t \rangle = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle$$

Sia  $\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ;  $\underline{x}_u, \underline{x}_v$  sono linearmente indipendenti  $\iff \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$  ha rango 2 su  $U$ .

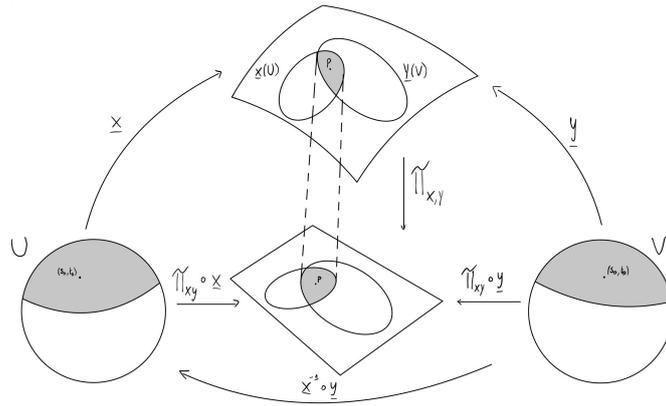
Supponiamo, senza perdita di generalità,  $\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0$  in un intorno di  $(u_0, v_0)$ .



in cui  $\pi_{xy} \circ \underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , dunque  $\pi_{xy} \circ \underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  è  $C^\infty$  e  $\det (J \pi_{xy} \circ \underline{x}(u_0, v_0)) \neq 0 \implies$  è invertibile con inversa  $C^\infty$  su un intorno di  $(u_0, v_0)$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Teorema della funzione inversa o Teorema di inversione locale.

Vogliamo scrivere  $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$  come composizione di funzioni  $C^\infty$ :



$$\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ (\pi \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} = \underbrace{(\pi \circ \underline{x})^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{\pi \circ \underline{y}}_{C^\infty}$$

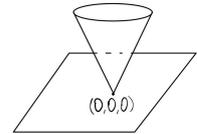
$$(x, y) = (\pi \circ \underline{x}) \circ (\pi \circ \underline{x})^{-1}(x, y) = \pi \circ (\underline{x} \circ (\pi \circ \underline{x})^{-1}(x, y)) \iff \underbrace{\underline{x}((\pi \circ \underline{x})^{-1}(x, y))}_{\text{intorno di } P} = \underbrace{(x, y, z(x, y))}_{\in \text{intorno di } \pi(P)}$$

$\underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$  e  $\underline{y}^{-1} \circ \underline{x}$  si dicono **funzioni di transizione**.

**Definizione 2.1.3.** Data una parametrizzazione regolare locale  $\underline{x}$  in un punto  $P = \underline{x}(u_0, v_0) \in M$ , con  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie,  $\mathcal{T}_P M = \langle \underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0) \rangle$  è il **piano tangente a M in P**.

**Esercizio 9 (Cono positivo).**

Sia  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ . Dimostrare che  $\mathcal{C}$  non è una superficie.



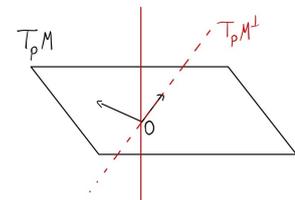
*Svolgimento.* Per assurdo, se  $\mathcal{C}$  fosse una superficie, allora sarebbe un grafico rispetto a qualche proiezione  $\pi \in \{\pi_{xy}, \pi_{xz}, \pi_{yz}\}$ , ma  $\pi_{xz}$  e  $\pi_{yz}$  non sono iniettive su alcun intorno di  $(0, 0, 0) \in \mathcal{C}$ .

Infatti,  $(x, y, z) \in \mathcal{C} \iff (-x, y, z) \in \mathcal{C} \iff (x, -y, z) \in \mathcal{C}$ :

$$\pi_{yz}(x, y, z) = \pi_{yz}(-x, y, z) \quad \text{e} \quad \pi_{xz}(x, y, z) = \pi_{xz}(x, -y, z)$$

$\pi_{xy}$ : se  $\mathcal{C}$  fosse un grafico intorno a  $(0, 0, 0)$ , esisterebbero  $\exists U$  intorno di  $(0, 0)$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tali che  $\forall (u, v) \in U$  si ha  $(u, v, f(u, v)) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ , cioè  $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$  che non è  $C^\infty$ .  $\square$

**Definizione 2.1.4.** La **normale canonica** a  $\mathcal{T}_P M$  è  $\frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} =: n_{\underline{x}}$ .



Buona definizione: sia  $\underline{y}$  un'altra parametrizzazione regolare intorno a  $P = \underline{x}(u_0, v_0) = \underline{y}(s_0, t_0)$ ,

$$n_{\underline{y}}(s_0, t_0) = \frac{\underline{y}_s \times \underline{y}_t}{\|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\|}(s_0, t_0) = \pm n_{\underline{x}}(u_0, v_0)$$

Per verificare che effettivamente il segno possa essere anche negativo, supponiamo  $U = D_\epsilon(0) =$  dischetto intorno a  $(0, 0)$ . Prendiamo  $\underline{y}(u, v) := \underline{x}(u, -v)$ , perciò  $\underline{y}_u = \underline{x}_u$  e  $\underline{y}_v = -\underline{x}_v$ , dunque

$$\underline{y}_u \times \underline{y}_v = \underline{x}_u \times (-\underline{x}_v) = -\underline{x}_u \times \underline{x}_v.$$



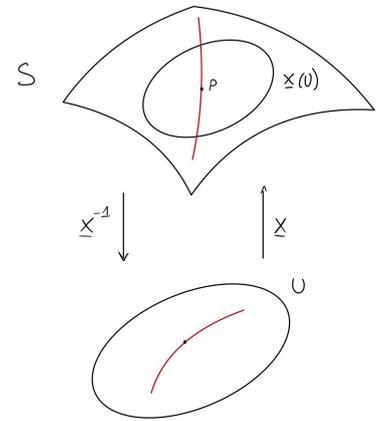
### 3.1 Approcci iniziali

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regolare con  $\text{traccia}(\alpha) \subseteq \Sigma = \text{superficie}$ . Supponiamo  $0 \in I$  e  $P = \alpha(0) \in S$ . Scegliamo una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  intorno a  $P \in \underline{x}(U) = \text{intorno di } P$ . Dunque  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \underline{x}(U)$  per qualche  $\varepsilon > 0$ .  $\underline{x}^{-1} \circ \alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\underline{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$$

$\exists \pi$  proiezione tale che  $\pi \circ \underline{x}$  sia invertibile e  $C^\infty$  su un intorno di  $(u_0, v_0)$  (supponiamo  $\underline{x}(u_0, v_0) = P$ ):

$$\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ (\pi \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1} \circ \alpha = \underbrace{(\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi}_{C^\infty} \circ \alpha$$



$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t)) \implies \alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u + v'(t)\underline{x}_v \implies \alpha'(0) = u'(0)\underline{x}_u(u_0, v_0) + v'(0)\underline{x}_v(u_0, v_0) \in \mathcal{T}_P\Sigma$$

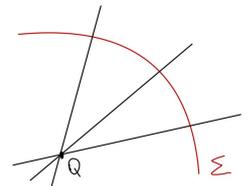
dunque  $\{\alpha'(0) \mid \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{traccia}(\alpha) \subseteq \Sigma, \alpha(0) = P\} \subseteq \mathcal{T}_P\Sigma$ .

Resta da dimostrare che  $\{\alpha'(0) \mid \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{traccia}(\alpha) \subseteq \Sigma, \alpha(0) = P\} \supseteq \mathcal{T}_P\Sigma$ :

sia  $v = a\underline{x}_u(u_0, v_0) + b\underline{x}_v(u_0, v_0) \in \mathcal{T}_P\Sigma$  per qualche  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dunque, se  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0 + at, v_0 + bt)$ , allora  $\alpha(0) = \underline{x}(u_0, v_0) = P$  e  $\alpha'(0) = v$ .

Perciò,  $\mathcal{T}_P\Sigma = \{\alpha'(0) \mid \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{traccia}(\alpha) \subseteq \Sigma, \alpha(0) = P\}$ .

**Esercizio 10.** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie connessa tale che  $\exists Q \in \mathbb{R}^3$  appartenente a tutte le rette normali  $(\mathcal{T}_P\Sigma)^\perp \forall P \in \Sigma$ . Dimostrare che  $\Sigma$  è contenuta in una sfera (di centro  $Q$ ).



*Svolgimento.* Sia  $P \in \Sigma$  e sia  $C = \|P - Q\|$ : vogliamo mostrare che tutti i punti di  $\Sigma$  sono a distanza  $C$  da  $Q$ . Possiamo decomporre  $\Sigma = A \cup B$ , con  $A = \{S \in \Sigma : \|S - Q\| \neq C\}$  e  $B = \{S \in \Sigma : \|S - Q\| = C\}$ . Chiaramente  $A$  è aperto,  $A \cap B = \emptyset$  e  $P \in B \implies B \neq \emptyset$ . Per concludere, vista la connessione, è sufficiente mostrare  $B$  aperto. Se  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare intorno a  $P$ , allora basta mostrare

$$\|\underline{x}(u, v) - Q\| \equiv C \quad \forall (u, v) \in U^1$$

<sup>1</sup>Senza perdita di generalità, supponiamo che  $U$  sia connesso.

Poiché  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}[(\underline{x} - Q) \cdot (\underline{x} - Q)] &= 2\underline{x}_u \cdot \overbrace{(\underline{x} - Q)}^{\in \mathcal{T}_{\underline{x}(u,v)}\Sigma^\perp} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}[(\underline{x} - Q) \cdot (\underline{x} - Q)] &= 2\underline{x}_v \cdot \overbrace{(\underline{x} - Q)}^{\in \mathcal{T}_{\underline{x}(u,v)}\Sigma^\perp} = 0 \end{aligned}$$

Perciò  $\|\underline{x} - Q\| \equiv C \implies B$  è aperto e, poiché  $\Sigma$  è connessa,  $A = \emptyset \implies \Sigma = B$ .  $\square$

### 3.2 Prima Forma Fondamentale

**Definizione 3.2.1.** Data una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , la **Prima Forma Fondamentale** di  $\Sigma$  è la famiglia di prodotti scalari indotti sui piani tangenti:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{I}_P : \mathcal{T}_P\Sigma \times \mathcal{T}_P\Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 \cdot v_2 \end{array} \right\}_{P \in \Sigma}$$

Fissata una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  intorno a un punto  $P = \underline{x}(u_0, v_0) \in \Sigma$ , la matrice simmetrica di  $\mathbb{I}_P : \mathcal{T}_P\Sigma \times \mathcal{T}_P\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$  rispetto alla base  $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$  è  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u, v)$ , con

$$\mathcal{T}_P\Sigma = \langle \overbrace{\underline{x}_u(u_0, v_0)}^{\underline{x}_u(P)}, \overbrace{\underline{x}_v(u_0, v_0)}^{\underline{x}_v(P)} \rangle \text{ e } E, F, G : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funzioni } C^\infty \text{ in } (u, v).$$

**Esempio 15.** Data  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  curva regolare tale che  $\text{traccia}(\alpha) \subseteq \underline{x}(U)$ , sappiamo che  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , dunque  $\alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + v'(t)\underline{x}_v(\alpha(t))$ , perciò

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) &= \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) & v'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \\ &= u'(t)^2 E(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)F(u(t), v(t)) + v'(t)^2 G(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u, v) = \underline{x}_u(u, v) \cdot \underline{x}_u(u, v) \\ F(u, v) = \underline{x}_u(u, v) \cdot \underline{x}_v(u, v) \\ G(u, v) = \underline{x}_v(u, v) \cdot \underline{x}_v(u, v) \end{array} \right. \quad \text{Coefficienti della Prima Forma Fondamentale}$$

**Osservazione 3.** L'**Esempio** appena visto ci dice che la lunghezza di una curva su una superficie  $\Sigma$  è determinata dalla prima forma fondamentale: se  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una curva regolare, allora

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G} dt$$

**Esempio 16.** Per il piano affine  $\mathcal{P} = P + \langle w_1, w_2 \rangle$ , con  $(w_1, w_2)$  base ortonormale, con la parametrizzazione regolare  $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(u, v) \longmapsto P + uw_1 + vw_2$ , si ha  $\underline{x}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}$ ,  $\underline{x}(u, v) \in \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{T}_{\underline{x}(u,v)}\mathcal{P} \equiv \langle w_1, w_2 \rangle$ :  $\underline{x}_u = w_1$  e  $\underline{x}_v = w_2$ , il prodotto scalare è costante al variare di  $P$ , perciò

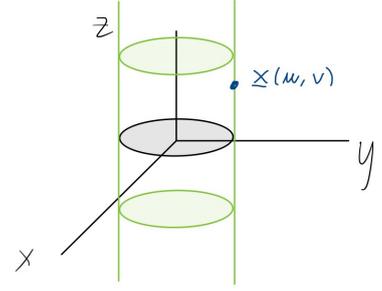
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 17 (Cilindro).** Dato  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  il cilindro, con parametrizzazione regolare  $\underline{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v),$$

$\mathcal{C} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ , dunque  $\underline{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $\underline{x}_v = (0, 0, 1)$ ,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Esempio 18 (Elicoide).**  $\underline{x}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ , con  $b \neq 0$ :

$$\begin{cases} \underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0) \\ \underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b) \end{cases} \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

La retta verticale (blu) sarà  $v \mapsto \underline{x}(u_0, v)$  e derivando:  $\underline{x}_v(P) = \underline{x}_v(u_0, v_0)$ .  
La retta orizzontale (arancione) sarà  $u \mapsto \underline{x}(u, v_0)$  e derivando:  $\underline{x}_u(P) = \underline{x}_u(u_0, v_0)$ : segue che

$$F(u_0, v_0) = \underline{x}_u(P) \cdot \underline{x}_v(P)$$

Quindi, se  $\underline{x}$  ha  $F \equiv 0$ , allora le sue linee coordinate sono ortogonali.

Più in generale, se  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ , allora

$$F(u_0, v_0) = \underline{x}_u(P) \cdot \underline{x}_v(P) = \frac{\|\underline{x}_u(P)\| \|\underline{x}_v(P)\|}{\sqrt{E(u_0, v_0)} \sqrt{G(u_0, v_0)}} \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}$$

dove  $0 \leq \theta \leq \pi$  è l'angolo tra le linee coordinate in  $\underline{x}(u_0, v_0) = P$ .

**Esercizio 11.** Sia  $P \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  e  $\underline{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare e  $P \in \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ . Dimostrare che  $\underline{x}$  è **conforme** (cioè conserva gli angoli tra curve regolari qualunque)  $\iff E \equiv G$  ed  $F \equiv 0$ .

*Svolgimento.* Consideriamo  $\alpha(s) = (u(s), v(s))$  e  $\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{u}(s), \tilde{v}(s))$ , dunque  $\alpha'(s) = (u'(s), v'(s))$  e  $\tilde{\alpha}'(s) = (\tilde{u}'(s), \tilde{v}'(s))$ . Sappiamo che:

$$\begin{aligned} (\underline{x} \cdot \alpha)'(s) &= u'(s)\underline{x}_u + v'(s)\underline{x}_v \\ (\underline{x} \cdot \tilde{\alpha})'(s) &= \tilde{u}'(s)\underline{x}_u + \tilde{v}'(s)\underline{x}_v \end{aligned}$$

( $\iff$ )

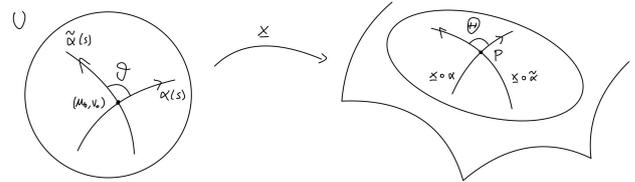
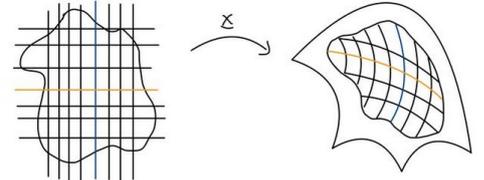
$$\frac{\|\alpha'(s)\| \|\tilde{\alpha}'(s)\|}{\sqrt{(u'(s)^2 + v'(s)^2)(\tilde{u}'(s)^2 + \tilde{v}'(s)^2)}} \cos \theta = \alpha'(s) \cdot \tilde{\alpha}'(s) = u'(s) \cdot \tilde{u}'(s) + v'(s) \cdot \tilde{v}'(s) \quad (3.1)$$

E questo equivale a:

$$\frac{\|(\underline{x} \cdot \alpha)'(s)\| \|(\underline{x} \cdot \tilde{\alpha})'(s)\|}{\sqrt{E(u'(s)^2 + v'(s)^2)E(\tilde{u}'(s)^2 + \tilde{v}'(s)^2)}} \cos \Theta = (\underline{x} \cdot \alpha)'(s) \cdot (\underline{x} \cdot \tilde{\alpha})'(s) = E(u'(s)\tilde{u}'(s) + v'(s)\tilde{v}'(s)) \quad (3.2)$$

$$(3.1) = (3.2) \implies \cos \theta = \cos \Theta \implies \theta = \Theta$$

( $\implies$ ) Se  $\underline{x}$  è conforme, allora manda linee coordinate standard in linee coordinate ortogonali, dunque  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \equiv 0$  e, di conseguenza,  $F \equiv 0$ . Consideriamo ora delle linee coordinate generiche, parametrizzate



da  $\alpha(s) = (u_0, v_0) + s(1, 1)$  e  $\tilde{\alpha}(s) = (u_0, v_0) + s(-1, 1)$ : certamente  $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0) = (u_0, v_0)$ . Detto  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ , vale:

$$\begin{aligned} (\underline{x} \cdot \alpha)'(0) &= \underline{x}_u(P) + \underline{x}_v(P) \\ (\underline{x} \cdot \tilde{\alpha})'(0) &= -\underline{x}_u(P) + \underline{x}_v(P) \end{aligned}$$

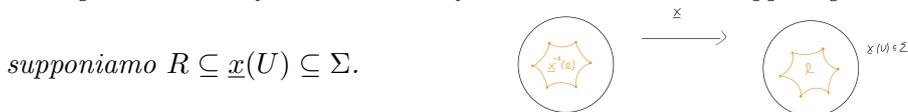
dunque  $0 = \alpha'(0) \cdot \tilde{\alpha}'(0) = (\underline{x} \cdot \alpha)'(0) \cdot (\underline{x} \cdot \tilde{\alpha})'(0) = -E(u_0, v_0) + G(u_0, v_0)$ .

Visto che ciò vale  $\forall (u_0, v_0)$ , si ha  $E \equiv G$ . □

### 3.2.1 Area di regioni $R$

La prima forma fondamentale può essere utilizzata anche per determinare l'area di una regione.

**Definizione 3.2.2.** Una **regione**  $R \subseteq \Sigma$  è la chiusura di un aperto  $\mathring{R} \subset R$  tale che  $\partial R := R \setminus \mathring{R}$  è immagine omeomorfa di una circonferenza tramite una mappa regolare tranne un numero finito di punti:



**Definizione 3.2.3.** Se  $\partial \underline{x}^{-1}(R)$  è regolare a tratti, allora l'**area** di  $R$  è

$$\text{Area}(R) := \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du \, dv$$

**Esercizio 12.** Mostrare che  $\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ .

*Svolgimento.* Dati due vettori  $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$X \times Y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = |n \cdot (\underline{x}_u \times \underline{x}_v)| = \det \begin{pmatrix} - & n & - \\ - & \underline{x}_u & - \\ - & \underline{x}_v & - \end{pmatrix}$$

$$\implies \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|^2 = \det \left[ \begin{pmatrix} - & n & - \\ - & \underline{x}_u & - \\ - & \underline{x}_v & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ n & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ | & | & | \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0 \quad \square$$

Perciò,  $\text{Area}(R) = \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$ .

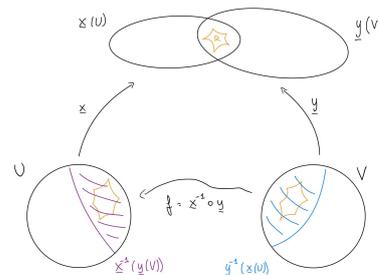
**Esercizio 13.** Verificare che  $\text{Area}(R)$  non dipende da  $\underline{x}$ .

*Svolgimento.*  $f(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$  se e solo se  $\underline{y}(s, t) = \underline{x}(f(s, t)) = \underline{x}(u(s, t), v(s, t))$ , dunque

$\underline{y}_s = u_s \cdot (\underline{x}_s \circ f) + v_s \cdot (\underline{x}_v \circ f)$  e  $\underline{y}_t = u_t \cdot (\underline{x}_u \circ f) + v_t \cdot (\underline{x}_v \circ f)$ , perciò

$$\underline{y}_s \times \underline{y}_t = u_s v_t (\underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f) + u_t v_s (\underline{x}_v \times \underline{x}_u \circ f) = \underbrace{(u_s v_t - u_t v_s)}_{\det(Jf)} \underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f$$

dove  $Jf = \begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix}$ . Dunque



$$\begin{aligned} \text{Area}_{\underline{y}}(R) &= \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\| \, ds \, dt = \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f\| |\det(Jf)| \, ds \, dt = \\ &= \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du \, dv = \text{Area}_{\underline{x}}(R) \end{aligned} \quad \square$$

**Esercizio 14 (Area del Toro).** Determinare l'area del toro.

*Svolgimento.* Ricordiamo che, se  $\underline{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ , allora il toro è  $\mathbb{T}_{a,b} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ , con  $a > b > 0$ .

**Teorema 3.2.1 (Pappo-Guldino).**  $\text{Area}(\mathbb{T}_{a,b}) = (2\pi b)a2\pi = (2\pi)^2 ab$ .

Detta  $R := \underline{x}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)) \subseteq \mathbb{T}_{a,b}$ , notiamo che  $\text{Area}(R) = \text{Area}(\mathbb{T}_{a,b})$ . Consideriamo dunque  $R_\varepsilon = \underline{x}((\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon))$ , da cui

$$\text{Area}(\mathbb{T}_{a,b}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Area}(R_\varepsilon)$$

$\underline{x}_u = (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u)$  e  $\underline{x}_v = (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0)$ , dunque i coefficienti della prima forma fondamentale del toro sono:

$$E = b^2, \quad F \equiv 0, \quad G = (a + b \cos u)^2 \implies \sqrt{EG - F^2} = b(a + b \cos u)$$

$$\implies \text{Area}(R_\varepsilon) = b \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} (a + b \cos u) du \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} dv = b [au + b \sin u]_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} (2\pi - 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^2 ab \quad \square$$

**Esercizio 15.** Mostrare che una parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  è conforme e conserva le aree  $\iff$

$$E \equiv G \equiv 1 \text{ e } F \equiv 0$$

*Svolgimento.* ( $\iff$ ) Abbiamo già visto in un **Esercizio** che  $\underline{x}$  è conforme.

Vogliamo  $\text{Area}(\underline{x}(R)) = \text{Area}(R)$ , ma infatti

$$\text{Area}(\underline{x}(R)) = \iint_R \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_R 1 du dv = \text{Area}(R)$$

( $\implies$ ) Poiché  $\underline{x}$  è conforme, per quell'**Esercizio** già visto,  $E \equiv G$  e  $F \equiv 0$ .

$$\text{Area}(B_\varepsilon(P)) = \text{Area}(\underline{x}(B_\varepsilon(P))) = \iint_{B_\varepsilon(P)} \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{B_\varepsilon(P)} E du dv$$

$$\iff 1 = \frac{1}{\text{Area}(B_\varepsilon(P))} \iint_{B_\varepsilon(P)} E du dv \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E(P)$$

Dato che questo vale al variare di  $P \in U$ , vale che  $E \equiv G \equiv 1$ . □

### 3.2.2 Orientabilità

Data  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare di  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie intorno a  $P = \underline{x}(u_0, v_0) \in \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ ,

$$n_{\underline{x}}(P) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad n_{\underline{x}}(P)^\perp = \mathcal{T}_P \Sigma$$

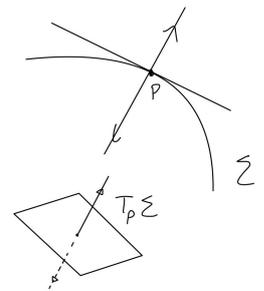
Se prendiamo un'altra parametrizzazione regolare  $\underline{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  intorno al punto  $P = \underline{y}(s_0, t_0) \in \underline{y}(V) \subseteq \Sigma$ , allora abbiamo la funzione di transizione

$$f = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \begin{array}{ccc} \underline{y}^{-1}(\underline{x}(U)) & \longrightarrow & \underline{x}^{-1}(\underline{y}(V)) \\ (s, t) & \longmapsto & (u(s, t), v(s, t)) \end{array}$$

da cui  $\underline{y} = \underline{x} \circ f$ , quindi  $\underline{y}_s = u_s \cdot \underline{x}_u \circ f + v_s \cdot \underline{x}_v \circ f$  e  $\underline{y}_t = u_t \cdot \underline{x}_u \circ f + v_t \cdot \underline{x}_v \circ f$ , dunque

$$\|\underline{y}_s \times \underline{y}_t(s_0, t_0)\| \cdot n_{\underline{y}}(P) = \underline{y}_s \times \underline{y}_t(s_0, t_0) = \det(\mathbf{J}f)(\underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f(s_0, t_0)) = \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v(u_0, v_0)\| \cdot n_{\underline{x}}(P)$$

<sup>2</sup>Per il **Teorema della media integrale**.



$$\implies n_{\underline{y}}(P) = \text{sgn}(\det(Jf)(s_0, t_0)) \cdot n_{\underline{x}}(P)$$

in cui la matrice Jacobiana di  $f$  in  $(s_0, t_0)$ ,  $Jf = (s_0, t_0) = \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$ , è la matrice di cambiamento di base  $\underline{y}_s(s_0, t_0), \underline{y}_t(s_0, t_0) \mapsto \underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0)$ . In conclusione,

$$\det(Jf) > 0 \iff n_{\underline{x}} = n_{\underline{y}} \text{ su } \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$$

**Definizione 3.2.4.** Una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice **orientabile**, se è ricoperta dalle immagini di un insieme di parametrizzazioni regolari tali che tutte le funzioni di transizione  $f$  hanno  $\det(Jf) > 0$ . Due tali parametrizzazioni si dicono **compatibili**.

**Definizione 3.2.5.** Una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $C^k$  in  $P \in \Sigma$ , con  $0 \leq k \leq \infty$  e  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie, se  $\exists \underline{x}$  parametrizzazione regolare intorno a  $P$  tale che  $f \circ \underline{x}$  è  $C^k$ . In particolare,  $f$  è  $C^k$  su  $\Sigma$ , se  $\forall P \in \Sigma$  è  $C^k$  in  $P$ .

**Osservazione 4.** La definizione è ben posta: se  $P \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$ , con  $\underline{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'altra parametrizzazione regolare di  $\Sigma$  intorno a  $P$ , allora  $f \circ \underline{y} = \underbrace{(f \circ \underline{x})}_{C^k} \circ \underbrace{(\underline{x}^{-1} \circ \underline{y})}_{C^k}$  è  $C^k$ .

**Proposizione 3.2.2.** Una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è orientabile  $\iff \exists N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^\infty$  tale che  $\forall P \in \Sigma$   $\|N(P)\| = 1$  e  $N(P)^\perp = \mathcal{T}_P \Sigma$ . Una tale  $N$  è detta **versore normale**. Inoltre, per  $(\iff)$  è sufficiente che  $N \circ \underline{x}$  sia continua (cioè  $C^0$ )  $\forall \underline{x}$ .

*Dimostrazione.*  $(\implies)$  Poiché  $\Sigma$  è orientabile, esiste una collezione di parametrizzazioni regolari a due a due compatibili, cioè, se  $\underline{x}, \underline{y}$  sono due parametrizzazioni regolari intorno a  $P$ , allora  $n_{\underline{x}}(P) = n_{\underline{y}}(P)$ , dunque  $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $N \circ (\underline{x}(u, v)) = n_{\underline{x}}(\underline{x}(u, v)) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}(u, v)$  è  $C^\infty$  su  $U$ .

$(\impliedby)$  Sia  $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione “versore normale” tale che  $N \circ \underline{x}$  sia continua  $\forall \underline{x}$  parametrizzazione regolare. Sia fissata (a caso) una famiglia di parametrizzazioni regolari le cui immagini ricoprono  $\Sigma$ . Possiamo supporre che tutti i domini siano connessi. Dato  $P \in \underline{x}(U)$ , vediamo se  $n_{\underline{x}}(P) = +N(P)$  oppure  $n_{\underline{x}}(P) = -N(P)$ .

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (n_{\underline{x}}(\underline{x}(u, v)), N(\underline{x}(u, v))) && \longmapsto n_{\underline{x}}(\underline{x}(u, v)) \circ N(\underline{x}(u, v)) \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

è continua, dunque  $\phi(U) = \begin{cases} \{+1\} \\ \{-1\} \end{cases}$ . Sia  $\varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\underline{x}} \mathbb{R}^3$ , con  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(u, v) \mapsto (v, u)$  : si ha  $\underline{x} \circ \varphi(u, v) = \underline{x}(v, u)$ , dunque  $(\underline{x} \circ \varphi)_u = \underline{x}_v \circ \varphi$  e  $(\underline{x} \circ \varphi)_v = \underline{x}_u \circ \varphi$ :

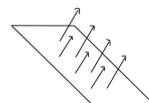
$$(\underline{x} \circ \varphi)_u \times (\underline{x} \circ \varphi)_v = -\underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ \varphi$$

Se  $n_{\underline{x}} = -N$  su  $U$ , allora cambiamo  $(\underline{x}, U)$  in  $(\underline{x} \circ \varphi, \varphi^{-1}(U))$ . Quindi  $N$  ci permette di trovare una collezione di parametrizzazioni regolari di  $\Sigma$  le cui immagini lo ricoprono e sono a due a due compatibili. □

**Esercizio 16.** Dimostrare che i piani affini, i grafici e le superfici del tipo  $f^{-1}(a)$ <sup>3</sup> sono orientabili.

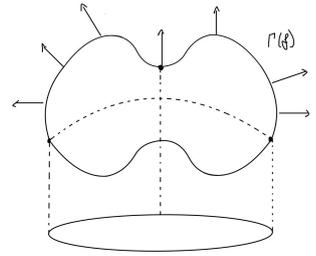
*Svolgimento.* Piani affini: se  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$  è un piano affine, allora  $\mathcal{T}_P \mathcal{P} = \text{giac}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{R}^3$  è costante al variare di  $P \in \mathcal{P}$ . L'applicazione “versore normale” voluta è dunque  $N : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$   $P \mapsto n_0$ ,

con  $n_0 \in \mathbb{R}^3$  tale che  $n_0^\perp = \text{giac}(\mathcal{P})$  e  $\|n_0\| = 1$ .



<sup>3</sup>Cioè con  $\nabla_P f \neq 0$  e  $P \in f^{-1}(a)$ .

*Grafici:* data  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2\}$  è il grafico di  $f$ . Dunque si ha che  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare tale che  $\underline{x}(U) = \Gamma(f)$ .  $n_{\underline{x}}(\underline{x}(u, v)) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}(u, v)$  definisce l'applicazione "versore normale" voluta, quindi  $\Gamma(f)$  è orientabile.



*Superfici:* in generale, ogni superficie è localmente orientabile.



Data  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nabla_P(f) = (f_x(P), f_y(P), f_z(P)) \neq (0, 0, 0) \forall P \in f^{-1}(a) = \Sigma$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

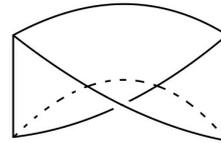
In tal caso,  $N(P) := \frac{\nabla_P(f)}{\|\nabla_P(f)\|}$  è l'applicazione "versore normale" voluta: infatti è  $C^\infty$ , ma dobbiamo verificare che  $N(P)^\perp = \mathcal{T}_P f^{-1}(a) \forall P \in f^{-1}(a)$ . Se  $P = \underline{x}(u_0, v_0) \in f^{-1}(a)$  è un punto e  $\underline{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare tale che  $\underline{x}(V) \subseteq f^{-1}(a)$ , con  $V$  connesso, allora  $f(\underline{x}(u, v)) \equiv a \forall (u, v) \in V$ , cioè

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv a \implies \begin{cases} f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u \equiv 0 \\ f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v \equiv 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla_P(f) \cdot \underline{x}_u = 0 \\ \nabla_P(f) \cdot \underline{x}_v = 0 \end{cases} \quad \forall P \in \underline{x}(V)$$

$$\iff \nabla_P(f) \in \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle^\perp = \mathcal{T}_P f^{-1}(a)^\perp$$

e quindi  $f^{-1}(a) = \Sigma$  è orientabile. □

**Esempio 19.** Il nastro di Möbius ( $M$ ) non è orientabile.



*Dimostrazione.* Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine del piano  $xy$ . Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  il sottoinsieme ottenuto ruotando opportunamente il segmento  $L = \{(0, 2, 0) + (0, 0, v) \mid -1 < v < 1\}$

(0,2,v)

attorno all'asse  $z$ . Parametizziamo  $C$  in senso orario:  $\alpha(u) = 2(\sin u, \cos u, 0)$  e definiamo

$$\beta(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotazione oraria di } u \\ (\mathcal{R}_u) \text{ intorno all'asse } z}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{u}{2} & -\sin \frac{u}{2} \\ 0 & \sin \frac{u}{2} & \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotazione antioraria di } \frac{u}{2} \\ (\mathcal{R}_{\frac{u}{2}}) \text{ nel piano } yz}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque definiamo  $\underline{x} : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e, di conseguenza,  $M := \underline{x}(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ . Come nel caso del toro, si dimostra che  $M$  è una superficie verificando:

- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  in ogni punto;
- $\underline{x}$  è iniettiva ristretta a opportuni rettangolini;
- sulle immagini di tali rettangolini,  $\underline{x}^{-1}$  è continua.

Dunque, per ora  $M$  è (almeno) localmente orientabile. Vediamo però il seguente

**Esercizio 17.** Siano  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientabile e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva chiusa, cioè con  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , tale che  $\alpha([a, b]) \subseteq \Sigma$ . Se  $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è continua tale che  $\|N(t)\| = 1$  e  $N(t)^\perp = \mathcal{T}_{\alpha(t)}\Sigma \forall t \in [a, b]$ , allora  $N(a) = N(b)$ .

*Svolgimento.*  $\Sigma$  è orientabile  $\iff \exists \underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  funzione “versore normale”. Consideriamo la mappa  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che è continua e  $\psi([a, b]) = \begin{cases} \{+1\} \\ \{-1\} \end{cases}$ . Senza perdita di generalità, possiamo supporre  $N(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) \equiv +1$ , dunque

$$N(a) = \underline{n}(\alpha(a)) = \underline{n}(\alpha(b)) = N(b) \quad \square$$

Se, per assurdo,  $M$  fosse orientabile, allora l’**Esercizio** appena visto, dovrebbe applicarsi.

Scegliamo  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dunque  $N(t) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}(t, 0) \neq 0$  è un versore normale in

$$\underline{x}(t, 0) = \alpha(t). \text{ Sicuramente } \alpha(u + 2\pi) = \alpha(u) \ \forall u \text{ e } \beta(u + 2\pi) = \underbrace{\mathcal{R}_{u+2\pi}}_{\mathcal{R}_u} \mathcal{R}_{\frac{u}{2}+\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\beta(u), \text{ dunque}$$

$$\underline{x}(u + 2\pi, v) = \underline{x}(u, -v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$$

da cui, derivando e valutando in  $(u, 0)$ ,

$$\begin{cases} \underline{x}_u(u + 2\pi, 0) = \underline{x}_u(u, 0) \\ \underline{x}_v(u + 2\pi, 0) = -\underline{x}_v(u, 0) \end{cases} \implies N(0) = N(0 + 2\pi) = -N(0) \neq N(0) \not\equiv$$

perciò  $M$  non è orientabile. □

### 3.2.3 Ulteriori considerazioni sulle orientazioni

Su uno spazio vettoriale reale  $V$ , con  $\dim V < +\infty$ , esiste la seguente nozione di orientazione: su l’insieme {basi} esiste la relazione di equivalenza per cui  $B, B'$  sono **concordi**, se  $\det \mathcal{M}_{B, B'}(\text{Id}_V) > 0$ .

**Definizione 3.2.6.** *Un’orientazione su  $V$  è una delle due classi di equivalenza di basi concordi. La **concordanza** è una relazione di equivalenza sulle basi di  $V$ :*

$$\mathcal{O} := \text{orientazioni su } V = \{\text{basi}\} / \text{concordanza}$$

**Osservazione 5.**  $\mathbb{R}^n$  ha un’orientazione canonica: [base canonica].

Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie orientabile, con una mappa “versore normale”  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  e fissato  $P \in \Sigma$ ,  $\underline{n}(P)$  determina un’orientazione  $\mathcal{O}_{\underline{n}}(P)$  su  $\mathcal{T}_P\Sigma$ :  $(\xi, \eta)$  è una base positiva di  $\mathcal{T}_P\Sigma$  se  $(\xi, \eta, \underline{n}(P))$  è una base positiva di  $\mathbb{R}^3$ . Poniamo  $\mathcal{O}_{\underline{n}}(P) := [\xi, \eta]$  e verifichiamo che è una buona definizione: se  $(\xi', \eta')$  è un’altra base positiva di  $\mathcal{T}_P\Sigma$ , allora

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} > 0$$

dunque  $(\xi, \eta)$  e  $(\xi', \eta')$  sono concordi, cioè definiscono la stessa orientazione su  $\mathcal{T}_P\Sigma$ .

Quindi:  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  determina un’orientazione (come spazio vettoriale) su ogni piano tangente  $\mathcal{T}_P\Sigma$ .

Viceversa: un’orientazione di  $\mathcal{T}_P\Sigma$ , chiamiamola  $\mathcal{O}(P)$ , determina un versore normale orientato. Infatti, se  $\mathcal{O}(P) = [\xi, \eta]$ , allora possiamo definire  $\underline{n}(P) = \frac{\xi \times \eta}{\|\xi \times \eta\|} \perp \mathcal{T}_P\Sigma$ : è ben definita perché, se  $[\xi', \eta'] = [\xi, \eta]$ ,

$$\text{allora } \begin{matrix} \xi' & \eta' \\ \xi \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0, \text{ dunque}$$

$$\begin{cases} \xi' = a\xi + b\eta \\ \eta' = c\xi + d\eta \end{cases} \implies \xi' \times \eta' = (ad - bc)\xi \times \eta \implies \frac{\xi' \times \eta'}{\|\xi' \times \eta'\|} = \underbrace{\frac{ad - bc}{|ad - bc|}}_{>0} \frac{\xi \times \eta}{\|\xi \times \eta\|}$$

### 3.2.4 Derivate di curve su superfici

Dati  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie,  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^\infty$ ,  $P \in \Sigma$  e  $\xi \in \mathcal{T}_P\Sigma$ , vogliamo definire la derivata direzionale:

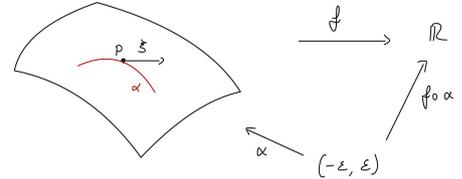
$D_\xi f := (f \circ \alpha)'(0)$ , dove  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  è una curva regolare tale che  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = \xi$ . Se  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare intorno a  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ , allora  $f \circ \alpha = \underbrace{(f \circ \underline{x})}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\underline{x}^{-1} \circ \alpha)}_{C^\infty}$

è liscia.  $\bar{\alpha}(t) = \underline{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $\bar{\alpha}(0) = (u_0, v_0)$ , dunque

$$\xi = \alpha'(0) = (\underline{x} \circ \bar{\alpha})'(0) = u'(0)\underline{x}_u(u_0, v_0) + v'(0)\underline{x}_v(u_0, v_0)$$

da cui

$$D_\xi f = (f \circ \alpha)'(0) = u'(0)(f \circ \underline{x})_u(u_0, v_0) + v'(0)(f \circ \underline{x})_v(u_0, v_0)$$



**Osservazione 6.**  $(f \circ \alpha)'(0)$  non dipende dalla parametrizzazione regolare  $\underline{x}$ .

**Osservazione 7.**  $u'(0)(f \circ \underline{x})_u(u_0, v_0) + v'(0)(f \circ \underline{x})_v(u_0, v_0)$  dipende da  $\alpha$  solo tramite le componenti di  $\alpha'(0)$  rispetto alla base  $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$ , cioè  $u'(0)$  e  $v'(0) \Rightarrow D_\xi f$  non dipende da  $\alpha$ .

In conclusione, la mappa "derivata direzionale"  $D : \mathcal{T}_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  è ben definita e, per quanto detto, è lineare.

**Definizione 3.2.7.** Data una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$ , l'**operatore forma** in un punto  $P \in \Sigma$  è

$$S_P : \mathcal{T}_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\xi \mapsto -D_\xi \underline{n}$$

**Proposizione 3.2.3.** Data una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$ ,

- (1)  $S_P : \mathcal{T}_P\Sigma \rightarrow \mathcal{T}_P\Sigma \forall P \in \Sigma$ , cioè  $S_P(\mathcal{T}_P\Sigma) \subseteq \mathcal{T}_P\Sigma \forall P \in \Sigma$ ;
- (2)  $S_P$  è autoaggiunto rispetto a  $I_P : \mathcal{T}_P\Sigma \times \mathcal{T}_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè

$$I_P(S_P\xi, \eta) = (S_P\xi) \cdot \eta = \xi \cdot (S_P\eta) = I_P(\xi, S_P\eta)$$

*Dimostrazione.* (1) Vogliamo  $D_\xi \underline{n} \cdot \underline{n}(P) = 0 \forall P \in \Sigma$  e  $\forall \xi \in \mathcal{T}_P\Sigma$ . Sia dunque  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  curva regolare tale che  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = \xi$ , quindi

$$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) \equiv 1 \implies -2D_\xi \underline{n} \cdot \underline{n}(P) = 0$$

(2) Se  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare intorno a  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ , allora

$$\underline{n}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_v(u, v_0) \equiv 0 \implies -D_{\underline{x}_v(P)} \underline{n} \cdot \underline{x}_v(P) + \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(u_0, v_0) = 0$$

$$\underline{n}(\underline{x}(u_0, v)) \cdot \underline{x}_u(u_0, v) \equiv 0 \implies -D_{\underline{x}_u(P)} \underline{n} \cdot \underline{x}_u(P) + \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(u_0, v_0) = 0$$

dunque  $\underline{x}_u \cdot S_P(\underline{x}_v) = S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v$  e, per linearità, si ha la tesi.  $\square$

**Esempio 20.** Calcolare l'operatore forma della sfera  $S_a^2(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = a > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Se  $\underline{n} : S_a^2(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_a^2(0)$  è una curva regolare tale che  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = \xi$ , allora

$$S_P(\xi) = -D_\xi \underline{n} = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underline{n}(\alpha(t)) = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{a} \alpha(t) = -\frac{1}{a} \xi \implies S_P = -\frac{1}{a} \text{Id}_{\mathcal{T}_P S_a^2(0)} \forall P \in S_a^2(0) \quad \square$$

**Definizione 3.2.8.** Data una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$ , la **curvatura Gaussiana** di  $\Sigma$  in  $P \in \Sigma$  è  $K(P) := \det S_P$  e la **curvatura media** di  $\Sigma$  in  $P \in \Sigma$  è  $H(P) := \frac{1}{2} \text{traccia}(S_P)$ .

Se  $K \equiv 0$ , allora  $\Sigma$  si dice **superficie piatta** mentre, se  $H \equiv 0$ , allora  $\Sigma$  si dice **superficie minima**.

**Osservazione 8.** La curvatura Gaussiana di  $S_a^2(0)$  è costante e vale  $K \equiv \frac{1}{a^2} > 0 \forall P \in S_a^2(0)$  mentre la curvatura media è  $H \equiv -\frac{1}{a}$  (o  $\frac{1}{a}$ , se avessimo preso l'altra orientazione).

### 3.3 Seconda Forma Fondamentale

**Definizione 3.3.1.** Data una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$ , la **Seconda Forma Fondamentale** di  $\Sigma$  è la famiglia di applicazioni bilineari simmetriche <sup>4</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_P : \mathcal{T}_P \Sigma \times \mathcal{T}_P \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) \longmapsto I_P(S_P \xi, \eta) \end{array} \right\}_{P \in \Sigma}$$

Fissata una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ , con  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ , abbiamo che  $\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)$  sono una base di  $\mathcal{T}_P \Sigma$ . La matrice associata a

$$I_P \text{ è } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad S_P \text{ è } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \Pi_P \text{ è } \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

con  $\begin{cases} E(u, v) = \underline{x}_u(u, v) \cdot \underline{x}_u(u, v) \\ F(u, v) = \underline{x}_u(u, v) \cdot \underline{x}_v(u, v) \\ G(u, v) = \underline{x}_v(u, v) \cdot \underline{x}_v(u, v) \end{cases}$  e  $\Pi_P(\xi, \eta) := I_P(S_P \xi, \eta)$ .

Quindi, se  $\xi, \eta \in \mathcal{T}_P \Sigma$  hanno coordinate  $X, Y$  rispetto alla base  $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$  <sup>5</sup>, allora

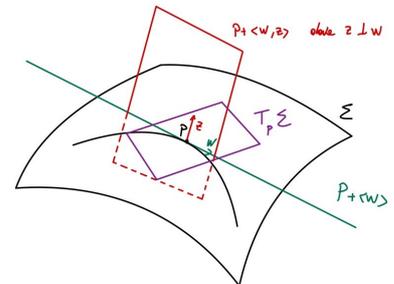
$$I_P(S_P \xi, \eta) = \left[ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} X \right]^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y = X^T \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$$

$$\implies \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \implies \ell n - m^2 = (\det S_P)(EG - F^2) \implies \boxed{K(P) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}}$$

e quest'ultima è una formula per calcolare la **curvatura Gaussiana**.

#### 3.3.1 Significato geometrico dei valori $\Pi_P(w, w)$ e $\|w\| = 1$ , con $w \in \mathcal{T}_P \Sigma$

Date una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$  e una parametrizzazione regolare compatibile  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  attorno a  $P \in \underline{x}(U)$ , consideriamo  $n_{\underline{x}}$  la normale associata a  $\underline{x}$ ,  $w \in \mathcal{T}_P \Sigma$  tale che  $\|w\| = 1$  e un piano affine  $\pi = \langle w, z \rangle$  per  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$  contenente la retta  $P + \langle w \rangle$ : vogliamo studiare  $\pi \cap \underline{x}(U)$ . (L'obiettivo è dare delle condizioni su  $\pi$ , che sarà del tipo  $ax + by + cz = d$ , affinché  $\pi \cap \underline{x}(U)$  sia una curva regolare.)



Sia  $\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , studiamo  $\underline{x}^{-1}(\pi \cap \underline{x}(U))$ : si può trovare come luogo di zeri della funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $(u, v) \mapsto ax(u, v) + by(u, v) + cz(u, v) - d \quad \forall (u, v) \in U$  e possiamo dunque scrivere

$$\underline{x}^{-1}(\pi \cap \underline{x}(U)) = \{(u, v) \in U \mid f(u, v) = 0\}$$

Osserviamo che, per applicare il **Teorema della funzione implicita**, è necessario che  $f_u, f_v$  non si annullino, ma infatti

$$\begin{cases} f_u = (a, b, c) \cdot \underline{x}_u = ax_u + by_u + cz_u = 0 \\ f_v = (a, b, c) \cdot \underline{x}_v = ax_v + by_v + cz_v = 0 \end{cases} \iff \text{giac}(\pi) = (a, b, c)^\perp = \mathcal{T}_P \Sigma$$

quindi, se  $\text{giac}(\pi) \neq \mathcal{T}_P \Sigma$ , allora  $\underline{x}^{-1}(\pi \cap \underline{x}(U))$  ammette una parametrizzazione regolare in  $(u_0, v_0)$ . Senza perdita di generalità, supponiamo che  $f_v(u_0, v_0) \neq 0$ , dunque, per il **Teorema della funzione**

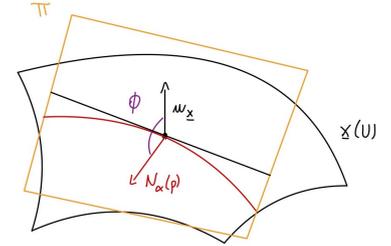
<sup>4</sup>Visto che  $S_P \xi$  è autoaggiunto.

<sup>5</sup>In generale,  $I_P(X, Y) = X^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y$ .

**implicita**, esiste una funzione  $C^\infty t \mapsto v(t)$  su un intorno di  $u_0$  tale che  $f(t, v(t)) = 0 \forall t$ , quindi la curva  $\bar{\alpha}(t) := (t, v(t))$  parametrizza  $\underline{x}^{-1}(\pi \cap \underline{x}(U))$  in  $(u_0, v_0)$ , perciò

$$\alpha(t) := \underline{x}(\bar{\alpha}(t)) = \underline{x}(t, v(t))$$

parametrizza  $\pi \cap \underline{x}(U)$  in  $P$ . Poiché  $\alpha'(t) = \underline{x}_u + v'(t)\underline{x}_v \neq 0$ ,  $\alpha$  è regolare e dunque, senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $\alpha(t)$  sia p.l.a.: se  $\alpha(u_0) = P$ , allora  $w = \alpha'(u_0)$  è tale che  $\|w\| = 1$ . Osserviamo che



$$\Pi_P(w, w) = S_P(w) \cdot w = -D_w(\underline{n}) \cdot w = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=u_0} n_{\underline{x}}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(u_0)$$

ma  $n_{\underline{x}}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \equiv 0$  perciò, derivando,  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=u_0} n_{\underline{x}}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) + n_{\underline{x}}(\alpha(t)) \cdot \alpha''(t) \equiv 0$ , dunque

$$\Pi_P(w, w) = n_{\underline{x}}(\alpha(u_0)) \cdot \alpha''(u_0) = n_{\underline{x}}(P) \cdot \kappa_\alpha(P) \cdot N_\alpha(P) = \kappa_\alpha(P) \cdot \underbrace{n_{\underline{x}}(P) \cdot N_\alpha(P)}_{\cos \phi}$$

con  $0 \leq \phi \leq \pi$ , e  $\Pi_P(w, w) =: \kappa_n(P)$  è detta **curvatura normale** di  $\alpha$ . In conclusione,

$$|\Pi_P(w, w)| = \text{“curvatura della sezione normale nel punto } P \text{ determinata da } w \in \mathcal{T}_P\Sigma = \pi \cap \underline{x}(U)\text{”}$$

con *sezione normale* = giac( $\pi$ ) =  $\langle w, n_{\underline{x}}(P) \rangle \iff \pi \perp \Sigma$  in  $P$ , in cui abbiamo posto  $z = n_{\underline{x}}(P)$ .

Domanda: cosa succede alle curvatures delle sezioni normali facendo variare  $w$ ?

Visto che  $S_P : \mathcal{T}_P\Sigma \rightarrow \mathcal{T}_P\Sigma$  è un operatore  $I_P$ -autoaggiunto,  $\mathcal{T}_P\Sigma$  ha una base di  $S_P$ -autovettori  $I_P$ -ortogonali ed è diagonalizzabile. Siano appunto  $e_1, e_2 \in \mathcal{T}_P\Sigma$  una base ortonormale di  $\mathcal{T}_P\Sigma$ , per cui  $S_P e_i = \kappa_i e_i$ , per  $i = 1, 2$ , dove  $\kappa_i = \text{“autovalore di } S_P\text{”}$  si dice **curvatura principale** mentre  $\langle e_i \rangle + P = \text{“retta affine tangente”}$ , con  $\langle e_i \rangle \subset \mathcal{T}_P\Sigma$ , si dice **direzione principale**.

Se  $w \in \mathcal{T}_P\Sigma$  è tale che  $\|w\| = 1$ , allora  $w = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$ , perciò

$$\begin{aligned} \Pi_P(w, w) &= S_P(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \cdot (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) = (\kappa_1 e_1 \cos \theta + \kappa_2 e_2 \sin \theta) \cdot (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

**Proposizione 3.3.1 (Formula di Eulero).**

Dato  $P \in \Sigma$ , se  $e_1, e_2 \in \mathcal{T}_P\Sigma$  formano una base ortonormale per  $S_P$ ,  $\kappa_1, \kappa_2$  sono curvatures principali e  $w = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$ , allora  $\Pi_P(w, w) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$ .

**Corollario 3.3.2.** Se  $\kappa_1 \leq \kappa_2$ , allora  $\kappa_1 \leq \Pi_P(w, w) \leq \kappa_2 \forall w \in \mathcal{T}_P\Sigma$  tale che  $\|w\| = 1$  e tutti i valori tra  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  sono realizzati.

*Dimostrazione.* Se  $\kappa_1 \leq \kappa_2$ , allora

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1(1 - \sin^2 \theta) + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2 \theta$$

e chiaramente  $\kappa_1 \leq \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2 \theta \leq \kappa_2$ . □

**Osservazione 9.** Ogni superficie è orientabile localmente (da  $n_{\underline{x}}$ , per qualche  $\underline{x}$  parametrizzazione regolare). Abbiamo già visto che  $K = \det S_P$  non dipende dalla scelta dell'orientazione. Analogamente, la curvatura Gaussiana e lo svanimento o meno di  $S_P$ <sup>6</sup> non dipendono dall'orientazione.

**Definizione 3.3.2 (Classificazione dei punti sulle superfici).** Data una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

1. se  $K(P) > 0$ , allora  $P$  si dice **ellittico**;
2. se  $K(P) < 0$ , allora  $P$  si dice **iperbolico**;
3. se  $K(P) = 0$  e  $S_P \neq 0$ , allora  $P$  si dice **parabolico**;
4. se  $S_P = 0$  ( $\implies K(P) = 0$ ), allora  $P$  si dice **planare**.

<sup>6</sup>Cioè se  $S_p = 0$  oppure  $S_p \neq 0$ .

**Esercizio 18 (Piano affine).** Dato un piano affine  $\mathcal{P}$  in  $\mathbb{R}^3$  e il piano tangente  $\mathcal{T}_P\mathcal{P} = \text{giac}(\mathcal{P}) = n_0^\perp$ , con  $\|n_0\| = 1$ , allora  $S_P = 0 \ \forall P \in \mathcal{P}$  e dunque tutti i punti di  $\mathcal{P}$  sono planari.

Precisazione: poiché  $\text{II}(\xi, \eta) = (S\xi) \cdot \eta = \xi \cdot (S\eta)$ , possiamo riscrivere la formula

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}$$

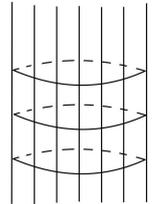
$\ell = \text{II}_P(\underline{x}_u, \underline{x}_u) = (S_P \underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u = -\frac{d}{du} n_{\underline{x}}(\underline{x}(u_0, v_0)) \cdot \underline{x}_u(u_0, v_0)$ . Poiché  $n_{\underline{x}}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_u(u, v_0) = 0$ , derivando rispetto a  $u$  e valutando in  $u = u_0$ , si ha  $\frac{d}{du} n_{\underline{x}}(\underline{x}(u_0, v_0)) \cdot \underline{x}_u(u_0, v_0) + n_{\underline{x}}(P) \cdot \underline{x}_{uu}(P) = 0$  e dunque  $\ell = n_{\underline{x}}(P) \cdot \underline{x}_{uu}(P)$ . Analogamente (**Esercizio**) si ricava  $m = n_{\underline{x}}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(P)$  e  $n = n_{\underline{x}}(P) \cdot \underline{x}_{vv}(P)$ .

**Esercizio 19 (Sfera).** Abbiamo visto che le sfere hanno  $K > 0$ , dunque hanno tutti i punti ellittici.

**Esercizio 20 (Cilindro).** Data  $\underline{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare, si

ha  $\underline{x}_u = R(-\sin u, \cos u, 0)$  e  $\underline{x}_v = (0, 0, 1)$ , dunque

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = R \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R(\cos u, \sin u, 0) \implies n_{\underline{x}} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$



perciò  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos u, \sin u, 0) \cdot R(-\cos u, -\sin u, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , quindi

$$\mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  generano le direzioni principali. Le curvatures principali sono  $-\frac{1}{R}$  e 0. In conclusione,  $\mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$  e  $K(P) = 0$ , dunque tutti i punti del cilindro sono parabolici.

**Esercizio 21 (Elicoide).** Data  $\underline{x}: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare, si ha  $\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0)$  e  $\underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$ , dunque

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \implies \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{b^2 + u^2}$$

perciò  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^2 + u^2 \end{pmatrix}$  e  $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u)$ .  $\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = \underline{n} \cdot (0, 0, 0) = 0$ ,  $m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = \underline{n} \cdot (-\sin v, \cos v, 0) = -\frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}}$  e  $n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = \underline{n} \cdot (-u \cos v, -u \sin v, 0) = 0$ , dunque

$$\text{II} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}} & 0 \end{pmatrix}, \text{ perci\o} \text{ } \mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2 + u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{(b^2 + u^2)^3}} & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene che  $H = \frac{1}{2} \text{traccia}(S) \equiv 0$ , perci\o l'elicoide \u00e8 una superficie minima, e anche che  $K = \det S_P = -\frac{b^2}{(b^2 + u^2)^2} < 0$ , quindi tutti i punti sono iperbolici. Da ci\o, le curvatures principali sono

$$\begin{cases} \kappa_1 \cdot \kappa_2 = -\frac{b^2}{(b^2 + u^2)^2} \\ \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \end{cases} \implies \kappa_{1,2} = \pm \frac{b}{b^2 + u^2}$$

**Esercizio 22 (Toro).** *Classificare i punti del toro  $\mathbb{T}_{a,b}$ , con  $a > b > 0$ .*

*Svolgimento.* Data una  $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare, si ha  $\underline{x}_u = -b(\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u)$  e  $\underline{x}_v = (a + b \cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$ , dunque

$$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = b^2, \quad F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0, \quad G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = (a + b \cos u)^2$$

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = -b(a + b \cos u) \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin u \cos v & \sin u \sin v & -\cos u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = -b(a + b \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$\implies \underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = \underline{n} \cdot (-b)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) = b$$

$$m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = \underline{n} \cdot (-b \sin u)(-\sin v, \cos v, 0) = 0$$

$$n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = (a + b \cos u)\underline{n} \cdot (-\cos v, -\sin v, 0) = (a + b \cos u) \cos u$$

$$\mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b \cos u)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b \cos u) \cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a+b \cos u} \end{pmatrix}$$

dunque  $\kappa_1 = \frac{1}{b}$  e  $\kappa_2 = \frac{\cos u}{a+b \cos u}$ . Poiché  $b \neq 0$ ,  $S \neq 0$  e dunque non ci sono punti planari. Poiché  $a > b > 0$ ,  $\text{sgn} \left( \frac{\cos u}{a+b \cos u} \right) = \text{sgn}(\cos u)$ , vale che:

$$K = 0 \iff u = \pm \frac{\pi}{2} \text{ che sono dunque punti parabolici.}$$

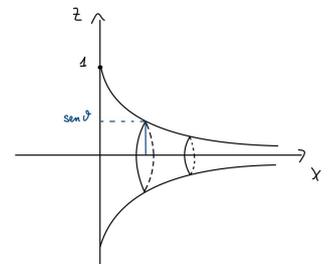
$$K > 0 \iff -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ che sono dunque punti ellittici.}$$

$$K < 0 \iff \frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi \text{ che sono quindi punti iperbolici.}$$

□

**Esercizio 23.** *Sia  $\Sigma$  la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse  $x$  la traccia della curva*

$$\alpha : \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}, \pi \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mapsto \left( \cos \theta + \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right), 0, \sin \theta \right)$$



*Dimostrare che  $K_\Sigma \equiv -1$ .*

*Svolgimento.* Prendiamo  $\underline{x}(u, \theta) = \left( \cos \theta + \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right), \cos u \sin \theta, \sin u \sin \theta \right)$  come parametrizzazione regolare, dunque  $\Sigma = \underline{x}(\mathbb{R} \times \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right))$ . Si ha  $\underline{x}_u = (0, -\sin u \sin \theta, \cos u \sin \theta) = \sin \theta(0, -\sin u, \cos u)$  e  $\underline{x}_\theta = \left( -\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta}, \cos u \cos \theta, \sin u \cos \theta \right) = \cos \theta(\cot \theta, \cos u, \sin u)$ , dunque

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_\theta = \cos \theta \sin \theta \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -\sin u & \cos u \\ \cot \theta & \cos u & \sin u \end{vmatrix} = \cos \theta(-\sin \theta, \cos u \cos \theta, \sin u \cos \theta)$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = (\sin \theta, -\cos u \cos \theta, -\sin u \cos \theta)$$

$$S_P(\underline{x}_u) = -D_{\underline{x}_u} \underline{n} = (0, -\sin u \cos \theta, \cos u \cos \theta) = \cos \theta(0, -\sin u, \cos u) = \cot \theta \cdot \underline{x}_u$$

$$S_P(\underline{x}_\theta) = -D_{\underline{x}_\theta} \underline{n} = (-\cos \theta, -\cos u \sin \theta, -\sin u \sin \theta) = -\tan \theta \cdot \underline{x}_\theta$$

$$\implies \mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} \cot \theta & 0 \\ 0 & -\tan \theta \end{pmatrix}$$

dunque  $K \equiv -1$  e tutti i punti sono iperbolici.

□

**Esercizio 24.** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie connessa tale che  $\forall P \in \Sigma S_P = \kappa(P) \text{Id}_{\mathcal{T}_P \Sigma}$ , mostrare che

- (1)  $\kappa$  è costante;
- (2) se  $\kappa \neq 0$ , allora  $\Sigma \subseteq$  sfera;
- (3) se  $\kappa = 0$ , allora  $\Sigma \subseteq$  piano affine.

*Svolgimento.* (1) Fissati  $P \in \Sigma$  e  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ , con  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ ,

$$S_P(\underline{x}_u) = -D_{\underline{x}_u(P)} \underline{n} = \kappa(P) \underline{x}_u \quad \text{e} \quad S_P(\underline{x}_v) = -D_{\underline{x}_v(P)} \underline{n} = \kappa(P) \underline{x}_v$$

Se  $\alpha(u) = \underline{x}(u + u_0, v_0)$ , allora  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = \underline{x}_u(P)$ , dunque

$$S_P(\underline{x}_u) = -D_{\underline{x}_u(P)} \underline{n} = -(\underline{n} \circ \underline{x})_u(P)$$

$$\begin{cases} (\underline{n} \circ \underline{x})_u + \kappa \cdot \underline{x}_u = 0 \\ (\underline{n} \circ \underline{x})_v + \kappa \cdot \underline{x}_v = 0 \end{cases} \quad \text{su } U \implies \begin{cases} (\underline{n} \circ \underline{x})_{uv} + \kappa_v \cdot \underline{x}_u + \kappa \cdot \underline{x}_{uv} = 0 \\ (\underline{n} \circ \underline{x})_{vu} + \kappa_u \cdot \underline{x}_v + \kappa \cdot \underline{x}_{vu} = 0 \end{cases} \implies \kappa_v \cdot \underline{x}_u - \kappa_u \cdot \underline{x}_v = 0$$

dunque, essendo linearmente indipendenti,  $\kappa_u \equiv \kappa_v \equiv 0$  su  $U$ , perciò  $\kappa$  è costante su  $\underline{x}(U)$ .

Fissato  $P \in \Sigma$ , l'insieme  $A = \{Q \in \Sigma \mid \kappa(Q) = \kappa(P)\}$ , per quanto visto, è aperto, chiuso e non vuoto, dunque  $\Sigma$  connessa  $\implies \Sigma = A \iff \kappa$  è costante.

Sia dunque  $\kappa = \kappa_0$ ,

$$\begin{cases} (\underline{n} \circ \underline{x} + \kappa \cdot \underline{x})_u = 0 \\ (\underline{n} \circ \underline{x} + \kappa \cdot \underline{x})_v = 0 \end{cases} \implies \underline{n} \circ \underline{x} + \kappa_0 \underline{x} = P_0 \in \mathbb{R}^3 \text{ su } U$$

dunque  $\underline{x}(u, v) = P_0 - \frac{1}{\kappa_0} \underline{n}(\underline{x}(u, v))$  e  $\underline{x}(U) \subseteq S_{\left| \frac{1}{\kappa_0} \right|}(P_0)$ , cioè, se  $P \in \underline{x}(U)$ , allora  $P \in S_{\left| \frac{1}{\kappa_0} \right|}(P_0)$ , dunque  $I = \{Q \in \Sigma \mid \underline{n}(Q) + \kappa_0 Q = P_0\} \neq \emptyset$ , è aperto, per quanto detto, ed è chiuso, quindi, poiché  $\Sigma$  è connessa,  $I \equiv \Sigma$ .

In conclusione, in (2)  $\kappa_0 \neq 0 \implies \Sigma \subseteq S_{\left| \frac{1}{\kappa_0} \right|}(P_0)$  e

in (3)  $\kappa_0 = 0 \implies \underline{n}(Q) = \underline{n}_0$  su  $\Sigma \forall \underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  parametrizzazione regolare:

$$\begin{cases} \underline{x}_u \cdot \underline{n}_0 = 0 \\ \underline{x}_v \cdot \underline{n}_0 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\underline{x} \cdot \underline{n}_0 = c_0}_{\text{piano affine}} \text{ su } U$$

dunque  $\underline{x}(U) \subseteq$  piano affine e, per il ragionamento esposto in precedenza,  $\Sigma \subseteq$  piano affine.  $\square$

**Esercizio 25.** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie compatta, mostrare che  $\exists P_0 \in \Sigma$  tale che  $K(P_0) > 0$ .

*Svolgimento.* Idea: la compattezza mi dice che la superficie è contenuta in una grossa palla. Se considero palla sempre più piccola, il primo punto di contatto dovrebbe avere la proprietà richiesta.

Consideriamo  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$   
 $P \mapsto \|P\|^2$  che è  $C^\infty$ , dunque  $\exists P_0 \in \Sigma$  di massimo per  $f$  e sia dunque  $R > 0$

tale che  $R^2 = f(P_0)$ . Vogliamo stimare le curvatures delle sezioni normali.<sup>8</sup> Sia  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una curva p.l.a. tale che  $\alpha(0) = P_0$ , dunque  $\varphi(t) = f(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$  ha massimo in 0, perciò necessariamente  $\varphi'(0) = 0$  e  $\varphi''(0) \leq 0$ :

$$0 = \varphi'(0) = 2\alpha'(0) \cdot \alpha(0) \implies P_0^\perp = \mathcal{T}_{P_0} \Sigma \iff P_0 = R \cdot \underline{n}(P_0)$$

$$0 \geq \varphi''(0) = 2 \left( \underbrace{\alpha''(0) \cdot P_0}_{\kappa_\alpha(0) \cdot N_\alpha(0) \cdot R \cdot \underline{n}(P_0)} + \underbrace{\alpha'(0) \cdot \alpha'(0)}_1 \right)$$

$R \cdot \Pi_{P_0}(\alpha'(0), \alpha'(0))$

<sup>7</sup>L'idea è che possiamo scambiare l'ordine di derivazione visto che le derivate miste "sono uguali".

<sup>8</sup>Poiché arriveremo a verificare che sono tutte  $\leq -\frac{1}{R} < 0$  e dunque le curvatures principali sono entrambe  $< 0$  e, di conseguenza,  $K(P_0) > 0$ .

dove  $\Pi_{P_0}(\alpha'(0), \alpha'(0))$  è la curvatura della sezione normale in  $P_0$  con tangente  $\alpha'(0)$ .

Dunque  $\forall w \in \mathcal{T}_{P_0}\Sigma$  tale che  $\|w\| = 1$  si ha  $R \cdot \Pi_{P_0}(w, w) + 1 \leq 0 \iff \Pi_{P_0}(w, w) \leq -\frac{1}{R} < 0$  e cioè le curvatures principali sono  $< 0$  in  $P_0$  e, di conseguenza,  $K(P_0) > 0$ .  $\square$

**Esercizio 26.** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie, mostrare che

- (a) se  $P \in \Sigma$  è ellittico, allora  $\exists$  intorno di  $P \in \Sigma$  “tutto dalla stessa parte” di  $P + \mathcal{T}_P\Sigma$ ;
- (b) se  $P \in \Sigma$  è iperbolico, allora  $\nexists$  intorno di  $P \in \Sigma$  “tutto dalla stessa parte” di  $P + \mathcal{T}_P\Sigma$ ;
- (c) se  $P \in \Sigma$  è parabolico o planare, allora possono realizzarsi sia (a) che (b).

*Svolgimento.* Osserviamo che, poiché le rototraslazioni di  $\mathbb{R}^3$   $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  conservano le curvatures delle curve, il tipo di  $P \in \Sigma$  è lo stesso di  $\mathcal{R}(P) \in \mathcal{R}(\Sigma) \forall \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie. Possiamo quindi ridurci a risolvere l'**Esercizio** dopo aver rototraslato  $\Sigma$  opportunamente.

Scegliamo dunque  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

- (1)  $\mathcal{R}(P) = O$ ;
- (2)  $\mathcal{T}_O\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{R}(\mathcal{T}_P(\Sigma)) =$  piano  $xy$ ;
- (3)  $\mathcal{R}$ (direzioni principali in  $\mathcal{T}_P\Sigma$ ) = direzioni principali in  $\mathcal{T}_O\mathcal{R}(\Sigma) =$  assi  $x$  e  $y$ .

Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  parametrizzazione regolare intorno a  $O$ , dunque  $\underline{x}_u, \underline{x}_v \in \mathcal{T}_O\Sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ , perciò  $J\underline{x}$  ha la terza riga nulla, quindi  $\Sigma$  è un grafico rispetto alla proiezione su  $xy$  su un intorno di  $O$ , cioè  $\underline{x}(U) = \{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in U\} \subseteq \Sigma$ , con  $f : U \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$ , e cioè  $f(O) = 0$ :  $\underline{x}_u = (1, 0, f_u)$  e  $\underline{x}_v = (0, 1, f_v)$ , ma dunque  $f_u(O) = f_v(O) = 0$ . Sviluppiamo  $f$  in serie di Taylor in un intorno di  $O$ :

$$f(u, v) = f(O) + uf_u(O) + vf_v(O) + \frac{1}{2}(u^2 f_{uu}(O) + uv f_{uv}(O) + v^2 f_{vv}(O)) + \varepsilon(u, v), \text{ con } \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \xrightarrow{(u, v) \rightarrow O} 0$$

$$E(O) = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = e_1 \cdot e_1 = 1, \quad F(O) = 0, \quad G(O) = 1$$

Inoltre,  $\underline{x}_{uu}(O) = (0, 0, f_{uu}(O))$ ,  $\underline{x}_{uv}(O) = (0, 0, f_{uv}(O))$  e  $\underline{x}_{vv}(O) = (0, 0, f_{vv}(O))$ . Di conseguenza  $\underline{n}(O) = \underline{x}_u(O) \times \underline{x}_v(O) = e_1 \times e_2 = e_3 = (0, 0, 1)$ , dunque, visto che  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(O) = I$  si ha che <sup>9</sup>

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uu}(O) & f_{uv}(O) \\ f_{uv}(O) & f_{vv}(O) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\Sigma_O} = {}^{10} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

dove  $\kappa_1, \kappa_2$  sono le curvatures principali di  $\Sigma$  in  $O$ . Dunque

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2) + \varepsilon(u, v)$$

(a) Se  $O \in \Sigma$  è ellittico, cioè, senza perdita di generalità, (i)  $\kappa_2 \leq \kappa_1 < 0$  o (ii)  $\kappa_1 \geq \kappa_2 > 0$ , allora

$$(i) \quad \frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2}{2(u^2 + v^2)} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \leq \frac{\kappa_1}{2} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} < 0$$

$$(ii) \quad \frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2}{2(u^2 + v^2)} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \geq \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} > 0$$

(b) Se  $O \in \Sigma$  è iperbolico, cioè  $\kappa_2 < 0 < \kappa_1$ , allora

$$\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2}{2(u^2 + v^2)} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \Big|_{\substack{u \neq 0 \\ v=0}} = \frac{\kappa_1}{2} + \frac{\varepsilon(u, 0)}{u^2} > 0$$

<sup>9</sup>Ossia la matrice della seconda forma fondamentale coincide con la matrice dell'operatore forma di  $\Sigma$  in  $O$ .

<sup>10</sup>Poiché l'asse  $x = \langle \underline{x}_u(O) \rangle$  e l'asse  $y = \langle \underline{x}_v(O) \rangle$  sono le direzioni principali.

$$\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2}{2(u^2 + v^2)} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \Big|_{\substack{u=0 \\ v \neq 0}} = \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\varepsilon(0, v)}{v^2} < 0$$

dunque ogni intorno di  $O \in \Sigma$  contiene sia punti sopra che sotto il piano  $z = 0$ .

(c) Il cilindro ha punti parabolici e la superficie sta tutta dalla stessa parte.

$O \in \Sigma' = \{z = x^2 + y^3\}$  è parabolico, ma  $\Sigma' \cap \{x = 0\}$  ha punti sia sopra che sotto  $\mathcal{T}_O \Sigma'$ .

Caso planare:  $z = x^4$  sta tutta da una parte;  $z = x^3$  sta un po' sopra e un po' sotto il suo piano tangente in  $O$ . □

**Esercizio 27.** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  la superficie ottenuta ruotando la traccia della curva  $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$  iniettiva, p.l.a. e tale che  $\alpha^{-1}$  continua, con  $f > 0$ , attorno all'asse  $z$ . Mostrare che, rispetto alla parametrizzazione regolare  $\underline{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ , le curve coordinate  $(\underline{x}(u, v_0), \underline{x}(u_0, v))$  sono linee di curvatura per  $\Sigma$ . Calcolare poi la curvatura Gaussiana e le curvatures principali.

*Svolgimento.* Si ha  $\underline{x}_u = (f' \cos v, f' \sin v, g')$  e  $\underline{x}_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$ , dunque

$$E = (f')^2 + (g')^2 \stackrel{11}{=} 1, \quad F = 0, \quad G = f^2$$

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = f \underbrace{(-g' \cos v, -g' \sin v, f')}_{\text{versore}} \implies \underline{n} = (-g' \cos v, -g' \sin v, f')$$

$$\underline{x}_{uu} = (f'' \cos v, f'' \sin v, g''), \quad \underline{x}_{uv} = (-f' \sin v, f' \cos v, 0), \quad \underline{x}_{vv} = (-f \cos v, -f \sin v, 0)$$

$$\implies \ell = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{n} = -f'' g' + f' g'', \quad m = \underline{x}_{uv} \cdot \underline{n} = 0, \quad n = \underline{x}_{vv} \cdot \underline{n} = f g'$$

$$\implies \mathcal{M}_{S_P} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' g'' - f'' g' & 0 \\ 0 & f g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' g'' - f'' g' & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f} \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale, quindi  $\underline{x}_u, \underline{x}_v$  sono autovettori di  $S$ , dunque le  $u$ -curve e le  $v$ -curve sono linee di curvatura.

$$\implies K = \frac{g'(f' g'' - f'' g')}{f} \stackrel{12}{=} \frac{f'(-f' f'') - f''(g')^2}{f} = -\frac{f''}{f} \quad \square$$

### 3.4 Teorema Egregium di Gauss

Gauss si chiedeva se fosse possibile approntare delle carte geografiche che rappresentassero fedelmente le lunghezze dei cammini. Rendiamo precisa la domanda da porci:

$\exists \underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma =$  superficie tale che “conservi la lunghezza delle curve”?

Data  $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$  quand'è che  $\ell(\alpha) = \ell(\bar{\alpha}) = \int_a^b \|\bar{\alpha}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt$  ?

Se  $\alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u + v'(t)\underline{x}_v$ , allora

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G} dt$$

poiché vogliamo l'uguaglianza delle lunghezze per tutte le curve,

$$\int_a^t \sqrt{u'(s)^2 + v'(s)^2} ds = \int_a^t \sqrt{u'(s)^2 E + 2u'(s)v'(s)F + v'(s)^2 G} ds$$

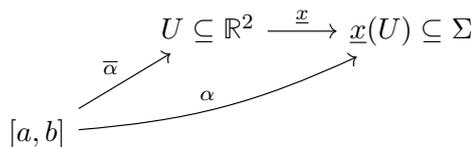
e dunque, derivando rispetto a  $t$ ,

$$\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} = \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G}$$

se imponiamo  $u(t) = t$  e  $v(t) = v_0$ , allora troviamo che  $E \equiv 1$ , se imponiamo  $u(t) = u_0$  e  $v(t) = t$ , allora troviamo  $G \equiv 1$  e anche  $F \equiv 0$ .

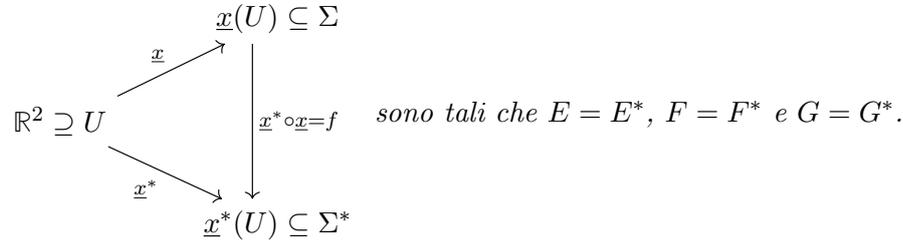
<sup>11</sup> $\alpha$  è p.l.a..

<sup>12</sup>Poiché  $(f')^2 + (g')^2 = 1 \implies 2(f' f'' + g' g'') = 0$ .

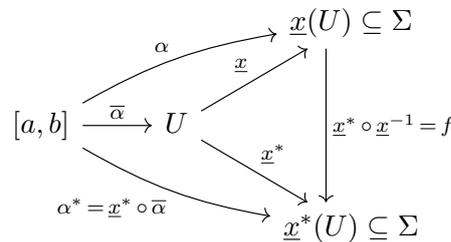


**Definizione 3.4.1.** Se  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  conserva le lunghezze e quindi  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \text{Id}$ , allora si dice che **definisce un'isometria locale**.

È naturale dunque generalizzare la definizione: due superfici  $\Sigma, \Sigma^*$  si dicono **localmente isometriche**, se  $\exists \underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  e  $\underline{x}^* : U \rightarrow \Sigma^*$  parametrizzazioni regolari tali che  $E = E^*, F = F^*$  e  $G = G^*$  su  $U$ .



**Osservazione 10.** Se  $\Sigma, \Sigma^*$  sono localmente isometriche a  $\mathbb{R}^2$ , allora sono isometriche.



$f$  è una bigezione che conserva le lunghezze delle curve. Basta verificare che conserva le velocità: poiché  $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = (u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G$  e  $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ , si ha

$$(\alpha^*)' \cdot (\alpha^*)' = (u')^2 E^* + 2u'v'F^* + (v')^2 G^*$$

e dunque  $E = E^*, F = F^*$  e  $G = G^*$ .

**Esercizio 28.** Viceversa, se  $\underline{x}^* \circ \underline{x}^{-1}$  conserva le lunghezze delle curve, allora  $\underline{x}, \underline{x}^*$  definiscono un'isometria locale.

**Teorema 3.4.1 (Egregium).** Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie e  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  è una parametrizzazione regolare, allora la curvatura Gaussiana  $K : U \rightarrow \mathbb{R}$  è esprimibile in termini di  $E, F, G$  e delle loro derivate parziali.

*Dimostrazione.* In ogni punto di  $\underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  c'è la base  $(\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n})$ , dunque

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v \underline{x}_v + \ell \underline{n} \\
 \underline{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v \underline{x}_v + m \underline{n} \\
 \underline{x}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{vv}^v \underline{x}_v + n \underline{n}
 \end{aligned}$$

dove  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  sono i **simboli di Christoffel**.

I  $\Gamma_{ij}^k$  sono esprimibili in termini di  $E, F, G$  (e loro derivate):

$$\begin{cases} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = E\Gamma_{uu}^u + F\Gamma_{uu}^v \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} = F\Gamma_{uu}^u + G\Gamma_{uu}^v \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = {}^{13} \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix}$$

Per concludere, si procede in modo analogo:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uv} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix}$$

<sup>13</sup>Poiché  $E_u = (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_u = 2\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu}$ ,  $F_u = (\underline{x}_v \cdot \underline{x}_u)_u = \underbrace{\underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u}_{\frac{1}{2}E_v} + \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu}$ .

e così via.

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$\ell d - mb = \frac{1}{EG - F^2} (\ell(-mF + nE) - m(-\ell F + mE)) = \frac{E(\ell n - m^2)}{EG - F^2} = EK$$

Per concludere, basta esprimere  $\ell d - mb$  in termini di  $E, F, G$ , ma questo fatto deriva direttamente dall'uguaglianza  $\underline{x}_{uu} = \underline{x}_{uv}$ : infatti, basta uguagliare i coefficienti di  $\underline{x}_v$ . Verifichiamolo:

$$\underline{x}_{uu} = \Gamma_{uu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v \underline{x}_v + \ell \underline{n} \implies \underline{x}_{uv} = \boxed{(\Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^v - \ell d)} \underline{x}_v + \dots$$

poiché  $\underline{n}_v = -S(\underline{x}_v) = -(c\underline{x}_u + d\underline{x}_v)$ .

$$\underline{x}_{uv} = \Gamma_{uv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v \underline{x}_v + m \underline{n} \implies \underline{x}_{uv} = \boxed{(\Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + (\Gamma_{uv}^v)_v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^v - mb)} \underline{x}_v + \dots$$

poiché  $\underline{n}_u = -S(\underline{x}_u) = (a\underline{x}_u + b\underline{x}_v)$ . Uguagliando  $\boxed{\text{questi}}$  si conclude. □

**Esempio 21.** Un piano affine ( $K \equiv 0$ ) non è localmente isometrico a una sfera ( $K > 0$ ). In particolare, non è possibile costruire carte geografiche che rispettino tutte le lunghezze delle curve.

**Esempio 22.** La superficie di rotazione dell'Esercizio 23, quella con  $K \equiv -1$ , non è localmente isometrica né a un piano né a una sfera.

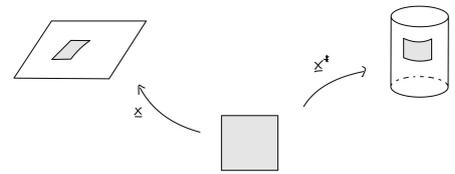
**Esempio 23.** Il cilindro ( $K \equiv 0$ ) e  $\mathbb{R}^2$  ( $K \equiv 0$ ) sono localmente isometrici?

Siano  $\Sigma = \{z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  il piano  $\mathbb{R}^2$  e  $\Sigma^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$  il cilindro di raggio  $a$ :

basta prendere  $\underline{x} : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$   
 $(u, v) \mapsto (u, v, 0)$ , con  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \text{Id}$ ,

per il piano e  $\underline{x}^* : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma^*$   
 $(u, v) \mapsto (a \cos(\frac{u}{a}), a \sin(\frac{u}{a}), v)$ , con

$\begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} = \text{Id}$  per il cilindro.



### 3.5 Trasporto parallelo

Premessa: non è un'operazione di tangente, ma un'operazione di proiezione sul tangente.

**Definizione 3.5.1.** Data una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , una mappa  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^\infty$  tale che  $X(P) \in \mathcal{T}_P \Sigma$   $\forall P \in \Sigma$  si dice **campo vettoriale**.

Inoltre, dato  $v \in \mathcal{T}_P X$ ,

$$\nabla_v X := (D_v X)^T := D_v X - (D_v X \cdot \underline{n}(P)) \underline{n}(P)$$

è la **derivata covariante** di  $X$  nella direzione  $v$ .

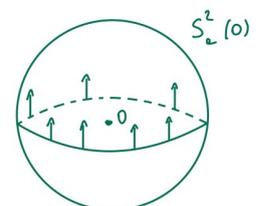
**Osservazione 11.** Data una curva  $\alpha_I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\alpha(t_0) = P$  e  $\alpha'(t_0) = v$ ,  $\nabla_v X$  dipende solo dalla restrizione di  $X$  alla traccia di  $\alpha$  su un intorno di  $P$ . Infatti,  $D_v X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (X(\alpha(t)))$ . Quindi  $\nabla_v X$  ha senso anche se  $X$  è definito solo sulla traccia di  $\alpha$ , a patto che  $X \circ \alpha$  sia derivabile.

**Definizione 3.5.2.** Data una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , un campo vettoriale  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **parallelo** lungo una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ , se  $\nabla_{\alpha'(t)} X \equiv 0 \forall t \in I$ .

**Esempio 24.** Sulla sfera  $S_1^2(0)$ , definiamo

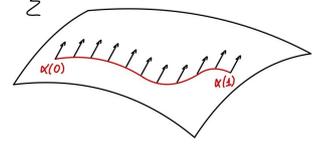
$$X : \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq S_1^2(0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tale che } X(x, y, 0) = (0, 0, 1)$$

dunque  $X(x, y, 0) \in \mathcal{T}_{(x,y,0)} S_1^2(0) \forall (x, y, 0) \in \{z = 0\} \cap S_1^2(0)$ . Notiamo che, se  $\alpha : I \rightarrow S_1^2(0)$  parametrizza l'equatore, allora  $\nabla_{\alpha'(t)} X = (D_{\alpha'(t)} X)^T = 0^T = 0$  e dunque  $X$  è parallelo lungo  $\alpha$ .



**Esempio 25.** Se  $\alpha : I \rightarrow S_1^2(0)$  parametrizza una circonferenza massima (ad esempio l'equatore) e  $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) \equiv \text{cost.}$ , allora  $2\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = 0$ . Poniamo  $X(\alpha(t)) := \alpha'(t) \forall t \in I$ .  $\alpha$  parametrizza la circonferenza di raggio 1 nel piano  $\pi$  passante per  $O$ , dunque  $\alpha''(t)$  è parallelo al raggio vettore  $\alpha(t)$ . Inoltre,  $\nabla_{\alpha'(t)} X = \frac{d}{dt}(X(\alpha(t)))^T = \frac{d}{dt}(\alpha'(t))^T = \alpha''(t)^T \equiv 0$ , perché  $\alpha(t) \perp \mathcal{T}_{\alpha(t)} S_1^2(0)$ . Perciò  $X$  è un campo parallelo lungo  $\alpha$ .

**Proposizione 3.5.1.** Date  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  curva regolare, se  $X_0 \in \mathcal{T}_{\alpha(0)} \Sigma$ , allora  $\exists! X$  campo parallelo lungo  $\alpha$  tale che  $X(\alpha(0)) = X_0$ .



*Dimostrazione.* Data una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U_i \rightarrow \Sigma$ , poiché  $\alpha([0, 1]) \subseteq \Sigma$  è compatto, è ricoperto da un numero finito di  $\underline{x}(U_i)$ . Perciò, è sufficiente dimostrare l'enunciato supponendo che  $\text{traccia}(\alpha) \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ , dove  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare. Data  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ , cerchiamo  $X$  tale che  $X_{\alpha(t)} = a(t) \cdot \underline{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \cdot \underline{x}_v(u(t), v(t))$ .

$$\begin{aligned} D_{\alpha'(t)} X &= \frac{d}{dt} X(\alpha(t))^T = a' \underline{x}_u + a(u' \underline{x}_{uu} + v' \underline{x}_{uv})^T + b' \underline{x}_v + b(u' \underline{x}_{vu} + v' \underline{x}_{vv})^T = \\ &= a' \underline{x}_u + a[u'(\Gamma_{uu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v \underline{x}_v) + v'(\Gamma_{uv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v \underline{x}_v)] + \\ &\quad + b' \underline{x}_v + b[u'(\Gamma_{uv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v \underline{x}_v) + v'(\Gamma_{vu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{vu}^v \underline{x}_v)] = \\ &= [a' + a(u' \Gamma_{uu}^u + v' \Gamma_{uv}^u) + b(u' \Gamma_{uv}^u + v' \Gamma_{vv}^u)] \underline{x}_u + [b' + a(u' \Gamma_{uv}^v + v' \Gamma_{vv}^v) + b(u' \Gamma_{vu}^v + v' \Gamma_{vv}^v)] \underline{x}_v \end{aligned}$$

$X$  è parallelo  $\iff \nabla_{\alpha'(t)} X \equiv 0 \iff (*) \begin{cases} a' + a(u' \Gamma_{uu}^u + v' \Gamma_{uv}^u) + b(u' \Gamma_{uv}^u + v' \Gamma_{vv}^u) = 0 \\ b' + a(u' \Gamma_{uv}^v + v' \Gamma_{vv}^v) + b(u' \Gamma_{vu}^v + v' \Gamma_{vv}^v) = 0 \end{cases}$  che è un sistema di equazioni differenziali lineari e ordinario, dunque, dal **Teorema di Cauchy** per le equazioni differenziali ordinarie, fissata la condizione iniziale  $(a_0, b_0) = (a(0), b(0))$ ,  $\exists! (a(t), b(t))$  soluzione.  $\square$

**Definizione 3.5.3.** Con la notazione della **Proposizione 3.5.1**, data  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  curva regolare,  $X(\alpha(1)) \in \mathcal{T}_{\alpha(1)} \Sigma$  si dice ottenuto da  $X_0 \in \mathcal{T}_{\alpha(0)} \Sigma$  per **trasporto parallelo**.

**Osservazione 12.** Poiché il sistema  $(*)$  è lineare e omogeneo, ogni combinazione lineare di sue soluzioni è ancora una soluzione, dunque la mappa “trasporto parallelo”  $\begin{matrix} \mathcal{T}_{\alpha(0)} \Sigma & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\alpha(1)} \Sigma \\ X_0 & \longmapsto & X(\alpha(1)) \end{matrix}$  è lineare.

**Proposizione 3.5.2.** Il trasporto parallelo conserva il prodotto scalare tra vettori.

*Dimostrazione.* Dati  $X, Y$  paralleli lungo una curva  $\alpha$ ,  $X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$  è costante in  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))) &= (D_{\alpha'(t)} X) \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot (D_{\alpha'(t)} Y) = \\ &= (\nabla_{\alpha'(t)} X) \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot (\nabla_{\alpha'(t)} Y) \equiv 0 \end{aligned}$$

poiché  $X, Y$  sono paralleli e dunque  $\nabla_{\alpha'(t)} X = \nabla_{\alpha'(t)} Y \equiv 0$ .  $\square$

**Osservazione 13.** La **Proposizione 3.5.2** implica che il trasporto parallelo è un'isometria, perché conserva le norme.

**Esempio 26.** Calcolare il trasporto parallelo di  $X \equiv (0, 0, 1)$  intorno al cerchio  $\{z = 0\}$  sul cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

Come nel caso della sfera, il campo  $X \equiv (0, 0, 1)$  è ovunque tangente al cilindro e la derivata covariante è chiaramente nulla, cioè  $X$  è parallelo lungo  $\{z = 0\}$  e dunque coincide col trasportato in ogni punto.

**Esercizio 29.** Calcolare il trasporto parallelo lungo un parallelo della sfera  $S_1^2(0) = S^2$  applicato ad un vettore tangente al parallelo stesso.

*Svolgimento.* Pensiamo a  $S^2 \setminus \{\text{poli}\}$  come la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse  $z$  la semicirconferenza  $\{(\sin u, 0, \cos u) \mid 0 < u < \pi\}$ : siano dunque la curva  $\alpha(u) = (\sin u, 0, \cos u)$  e la parametrizzazione regolare  $\underline{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ , con  $0 < u < \pi$  e  $v \in \mathbb{R}$ , dunque  $S^2 \setminus \{\text{poli}\} = \underline{x}((0, \pi) \times \mathbb{R})$ . Fissiamo il "parallelo"  $u = u_0$  che è parametrizzato da  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0, t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Il campo vettoriale lungo  $\alpha$  è

$$\begin{cases} X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(u_0, t) + b(t)\underline{x}_v(u_0, t) \\ X(\underline{x}(u_0, v_0)) = \underline{x}_v(u_0, v_0) \end{cases}$$

dunque il sistema di equazioni del trasporto parallelo è

$$\begin{cases} a' + a\Gamma_{uv}^u + b\Gamma_{vv}^u = 0 \\ b' + a\Gamma_{uv}^v + b\Gamma_{vv}^v = 0 \end{cases}$$

con condizioni iniziali  $a(0) = 0$  e  $b(0) = 1$ .

$\underline{x}_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$  e  $\underline{x}_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$ , dunque

$$E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G = \sin^2 u_0$$

da cui  $\Gamma_{uv}^u = \underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u = \cos u(-\sin v, \cos v, 0) \cdot \underline{x}_u \equiv 0$ ,  $\Gamma_{uv}^v = \frac{\underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_v}{\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v} = \frac{1}{\sin^2 u_0} \sin u_0 \cos u_0 = \frac{\cos u_0}{\sin u_0}$ ,  $\Gamma_{vv}^u = \underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_u = -\sin u(\cos v, \sin v, 0) \cdot \underline{x}_u = -\sin u_0 \cos u_0$  e  $\Gamma_{vv}^v = \frac{\underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_v}{\sin^2 u_0} = \frac{1}{\sin^2 u_0} \equiv 0$ . Dunque

$$\begin{cases} a' = b \sin u_0 \cos u_0 \\ b' = -a \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \end{cases} \implies b'' + \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \sin u_0 \cos u_0 b = 0 \iff b'' + k^2 b = 0, \text{ con } k := \cos u_0$$

e la soluzione è  $y(t) = c_1 \cdot \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$ :

$$\begin{aligned} 1 &= b(v_0) = y(0) = c_1 \\ 0 &= -a(0) \frac{\cos u_0}{\sin u_0} = y'(0) = kc_2 \end{aligned}$$

dunque,  $0 = k = \cos u_0 \iff \{u = u_0\} = \text{equatore} \implies a' = b' = 0 \implies a \equiv 0$  e  $b \equiv 1$ , quindi lungo l'equatore il vettore parallelo è sempre tangente, altrimenti  $k \neq 0 \implies c_2 = 0$ . Perciò

$$b(t) = \cos(t \cos u_0) \text{ e } a(t) = \sin u_0 \sin(t \cos u_0)$$

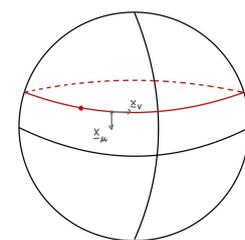
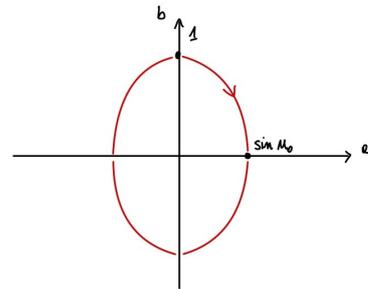
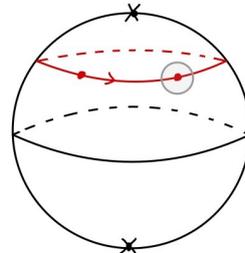
Conclusione: lungo un parallelo il vettore ruota in senso orario nell'emisfero Nord, in senso antiorario nell'emisfero Sud e rimane tangente all'equatore su di esso. □

**Osservazione 14.** Possiamo verificare che il trasporto parallelo, oltre ad essere un'isometria, conserva le orientazioni.

Siano  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva regolare e  $X, Y$  campi tangenti paralleli lungo  $\alpha$  tali che  $X(\alpha(0))$  e  $Y(\alpha(0))$  siano indipendenti. Se  $\underline{n}$  è un versore normale a  $\Sigma$  lungo  $\alpha$ , allora l'orientazione indotta da  $(X(\alpha(0)), Y(\alpha(0)))$  su  $\mathcal{T}_{\alpha(0)}\Sigma$  coincide con quella indotta da  $\underline{n}(\alpha(0))$  se e solo se l'orientazione indotta da  $(X(\alpha(1)), Y(\alpha(1)))$  coincide con quella indotta da  $\underline{n}(\alpha(1))$ .

Per verificarlo è sufficiente dimostrare che il prodotto misto  $\varphi(t) := [X(\alpha(t)) \times Y(\alpha(t))] \cdot \underline{n}(\alpha(t))$  è costante in  $t$ . Infatti,

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \cdot \underline{n} = [(D_{\alpha'} X) \times Y] \cdot \underline{n} + [X \times (D_{\alpha'} Y)] \cdot \underline{n} - \underbrace{[X \times Y] \cdot S(\alpha')}_{\text{perché } S(\alpha') \in \mathcal{T}\Sigma} = \underbrace{[\nabla_{\alpha'} X \times Y]}_{X \text{ è parallelo}} \cdot \underline{n} + \underbrace{[X \times \nabla_{\alpha'} Y]}_{Y \text{ è parallelo}} \cdot \underline{n} \equiv 0$$



### 3.6 Geodetiche

**Definizione 3.6.1.** Data una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  è una **geodetica** di  $\Sigma$ , se  $X(\alpha(t)) := \alpha'(t)$  è parallelo lungo  $\alpha$ , ovvero se  $\nabla_{\alpha'} \alpha' \equiv 0$ .

**Osservazione 15.** Se  $\alpha$  è una geodetica, allora  $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$  è costante e dunque  $\alpha$  è parametrizzata a velocità costante.

**Esempio 27.** Un cerchio massimo (ad esempio l'equatore) di  $S_a^2(0)$  parametrizzato a velocità costante è una geodetica. Quali sono però esattamente le geodetiche di  $S_a^2(0)$ ?

Una curva  $\alpha : I \rightarrow S_a^2(0)$  è una geodetica  $\iff 0 = \nabla_{\alpha'} \alpha' = (D_{\alpha'} \alpha')^T = (\alpha'')^T \iff \alpha'' \perp TS_a^2(0) \iff \alpha'' \times \alpha' \equiv 0 \iff$ <sup>14</sup>  $\alpha' \times \alpha' \equiv v_0 \neq 0$ , dunque  $\alpha(t) \cdot v_0 = 0$ , cioè  $\alpha(t) \in v_0^\perp \cap S_a^2(0) =$  cerchio massimo. Quindi le geodetiche di  $S_a^2(0)$  sono tutti e soli i cerchi massimi parametrizzati a velocità costante.

#### 3.6.1 Curvatura normale e curvatura geodetica

Siano  $(\Sigma, \underline{n})$  una superficie orientata localmente e  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  una curva p.l.a.:  $T(t) = \alpha'(t) \in \mathcal{T}_{\alpha(t)}\Sigma \forall t \in I$ . Notiamo che  $\underline{n}, T \perp \underline{n} \times T$  dunque  $(T, \underline{n} \times T, \underline{n})$  è una *base ortonormale positiva* di  $\mathbb{R}^3 \forall t$ .

Sappiamo che:  $\dot{T} = \kappa_\alpha N_\alpha$  e che  $T \cdot T \equiv 1 \implies T \cdot \dot{T} \equiv 0$ , quindi:

$$\dot{T} = (\dot{T} \cdot \underline{n} \times T) \cdot \underline{n} \times T + (\dot{T} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}$$

ma vale anche  $\dot{T} = D_{\alpha'} \alpha'$  e osserviamo che

$$(\dot{T} \cdot \underline{n} \times T) \cdot \underline{n} \times T = \nabla_{\alpha'} \alpha'$$

Dunque, se la curva è una geodetica, allora

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0 \iff \dot{T} \cdot \underline{n} \times T = 0$$

Quindi definiamo

$$\dot{T} \cdot (\underline{n} \times T) = (D_{\alpha'} \alpha')^T \cdot \underline{n} \times T = (\nabla_{\alpha'} \alpha') \cdot \underline{n} \times T =: \kappa_g \text{ **curvatura geodetica**}$$

$$\text{e } \dot{T} \cdot \underline{n} = (\kappa_\alpha N_\alpha) \cdot \underline{n} =: \kappa_n \text{ **curvatura normale**}$$

quindi  $\kappa_\alpha N_\alpha = \dot{T} = \kappa_g \cdot \underline{n} \times T + \kappa_n \cdot \underline{n}$  e

$$\dot{T} \cdot \dot{T} = \boxed{\kappa_\alpha^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2}$$

Dunque  $\alpha$  è una geodetica  $\iff \kappa_g = 0 \iff \alpha'' = \dot{T} \perp \mathcal{T}\Sigma$ .

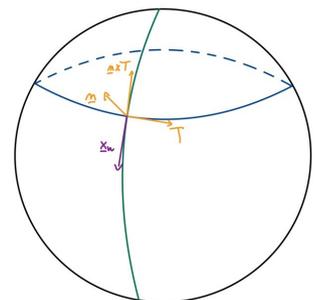
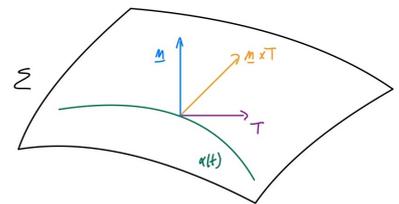
**Esercizio 30.** Calcolare la curvatura geodetica di un parallelo su  $S_1^2(0)$ .

*Svolgimento.* Se  $\underline{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ , con  $0 < u < \pi$ , allora  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0, t)$  parametrizza il parallelo  $u = u_0$ .

$$\alpha'(t) = \sin u_0 (-\sin t, \cos t, 0) \implies \beta(s) = \alpha \left( \frac{s}{\sin u_0} \right) \text{ è p.l.a.}$$

$$T(s) = \beta'(s) = \left( -\sin \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), \cos \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), 0 \right)$$

$$\implies \dot{T}(s) = \frac{1}{\sin u_0} \left( -\cos \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), -\sin \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), 0 \right)$$



<sup>14</sup>Derivando vorrei ottenere che, detto  $v_0^\perp$  il piano nell'origine,  $\text{traccia}(\alpha) \subseteq S_a^2(0) \cap v_0^\perp$  e, poiché  $(\alpha' \times \alpha)' = \alpha'' \times \alpha + \alpha' \times \alpha'$ , deve valere che  $\alpha' \times \alpha$  sia identicamente costante.

Se  $\underline{n} = \underline{x}$ , allora<sup>15</sup>  $\underline{n} \times T = -\underline{x}_u$ . Calcoliamo allora:

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \dot{T} \cdot (\underline{n} \times T) = -\dot{T} \cdot \underline{x}_u = \\ &= \frac{1}{\sin u_0} \left( \cos \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), \sin \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), 0 \right) \cdot \left( \cos u_0 \cos \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), \cos u_0 \sin \left( \frac{s}{\sin u_0} \right), \sin u_0 \right) = \\ &= \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\kappa_n = (\kappa_\beta N_\beta) \cdot \underline{n} = \dot{T} \cdot \underline{n} = \dot{T} \cdot \underline{x} = -\frac{\sin u_0}{\sin u_0} = -1$$

infatti la curvatura di ogni sezione normale è  $-1$ . Infine,

$$\kappa_\beta = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 u_0}{\sin^2 u_0}} = \frac{1}{\sin u_0}$$

perché il parallelo  $\{u = u_0\}$  è una circonferenza di raggio  $\frac{1}{\sin u_0}$ .  $\square$

### 3.6.2 Esistenza locale delle geodetiche

In coordinate locali su una superficie  $\Sigma$ , se  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare e, di conseguenza,  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  è una curva, allora  $X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t))$  è un campo vettoriale lungo  $\alpha$ . Quando  $\alpha = \gamma$  e  $X = \gamma'$ ,  $a(t) = u'(t)$  e  $b(t) = v'(t)$ , dunque si ha

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^u + 2u'v' \Gamma_{uv}^u + (v')^2 \Gamma_{vv}^u = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^v + 2u'v' \Gamma_{uv}^v + (v')^2 \Gamma_{vv}^v = 0 \end{cases}$$

cioè un sistema di equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, quindi il **Teorema di esistenza e unicità** delle soluzioni (con date condizioni iniziali) vale, ma solo “localmente”.

**Proposizione 3.6.1.** *Dati una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $P \in \Sigma$  e  $v \in \mathcal{T}_P \Sigma$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  e  $\exists! \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  geodetica tale che  $\gamma(0) = P$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dai risultati standard per l'esistenza di soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.  $\square$

**Esempio 28.** *Il piano  $\{z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  ha parametrizzazione regolare  $\underline{x}(u, v) = (u, v, 0)$ , perciò si ha  $\underline{x}_{uu} = \underline{x}_{uv} = \underline{x}_{vv} = 0$  e anche  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , dunque le geodetiche  $\gamma(t) = (u(t), v(t), 0)$  nel piano sono date*

dalle soluzioni di  $\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases} \iff \gamma(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, 0)$ , perciò tutte e sole le geodetiche del piano sono le rette parametrizzate a velocità costante.

**Osservazione 16.** *Il cilindro, che ha  $E, F, G$  costanti e quindi  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , ha geodetiche della forma  $\gamma(t) = \underline{x}(a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$ .<sup>16</sup>*

### Proposizione 3.6.2 (Esistenza di coordinate ortogonali).

*Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie,  $P \in \Sigma$  e  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  è una geodetica tale che  $\gamma(0) = P$  e  $\gamma'(0) \neq 0$ , allora  $\exists \underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  parametrizzazione regolare, con  $P \in \underline{x}(U)$ , tale che*

(i) *le curve coordinate  $\{v = \text{cost}\}$  sono tracce di geodetiche in  $\underline{x}(U)$ . In particolare, possiamo fare in modo che  $(0, 0) \in U$  e  $\underline{x}(0, 0) = P$ , cosicché  $\text{traccia}(\gamma) \cap \underline{x}(U) = \underline{x}(\{v = 0\})$ ;*

(ii)  $F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \equiv 0$ .

<sup>15</sup>Segue poiché  $0 = F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v$ .

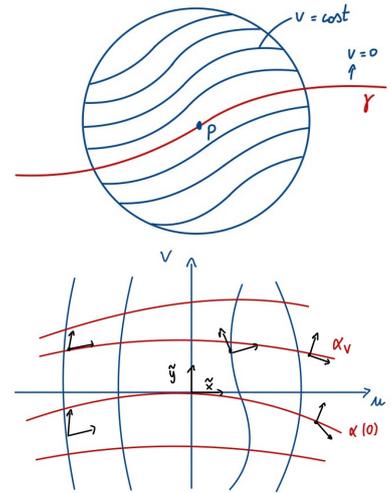
<sup>16</sup>Coerente col fatto che cilindro e piano sono isometrici.

*Linea della Dimostrazione.* 1° passo Se  $X, Y$  sono campi vettoriali su un intorno di  $P$  tali che  $X(P), Y(P)$  sono linearmente indipendenti, allora  $\exists \tilde{x} : V \rightarrow \tilde{x}(V) \subseteq \Sigma$  una parametrizzazione regolare, che ha come immagine un intorno di  $P$ , tale che  $\exists \lambda, \mu : \tilde{x}(V) \rightarrow \mathbb{R}_{>0} C^\infty$  tali che  $\tilde{x}_u(Q) = \lambda(Q) \cdot X(Q)$  e  $\tilde{x}_v(Q) = \mu(Q) \cdot Y(Q) \forall Q \in \tilde{x}(V)$ , cioè le linee coordinate parallele a  $X$  e a  $Y$ .

Infatti,  $\tilde{X}, \tilde{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  sono campi vettoriali su  $U$  con le stesse componenti che  $X, Y$  hanno nella base  $\underline{x}_u, \underline{x}_v$ .

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \tilde{X}(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{che ha soluzione } \alpha_v,$$

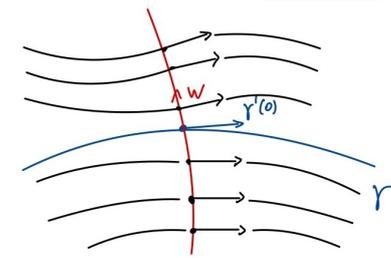
$$\begin{cases} \beta'(t) = \tilde{Y}(\beta(t)) \\ \beta(0) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{che ha soluzione } \beta_u.$$



Si dimostra che, su un intorno di  $(0,0)$ , per un punto  $P$  passano una sola  $\alpha_v$  e una sola  $\beta_u$ , cioè la mappa  $\varphi : P \mapsto (u, v)$ , dove  $P = \alpha_v \cap \beta_u$ , è un diffeomorfismo su un intorno di  $(0, 0)$  e poi si pone  $\tilde{x} := \underline{x} \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \Sigma$  che ha le proprietà volute.

2° passo Costruiamo opportunamente due campi vettoriali  $X, Y$  in modo che, applicando il 1° passo, si ottengano le coordinate con le proprietà volute.

In questo modo si ottiene intorno a  $P$  una coppia di campi  $X, Y$  non nulli e ortogonali in ogni punto. Applicando appunto il 1° passo, si ottengono coordinate ortogonali intorno a  $P$  adattate a  $\gamma$  nel senso dell'enunciato della **Proposizione 3.5.2**.



Consideriamo  $\gamma'(0)$  e  $\omega \perp \gamma'(0)$ .  $\exists \alpha'(0) = \omega$  curva. Abbiamo così tutti i trasportati di  $\omega$  e  $\gamma'(0)$  lungo  $\alpha$  come in figura.

A questo punto per ogni punto di  $\alpha$  costruiamo la geodetica passante per quel punto e con tangente pari al trasportato di  $\gamma'(0)$ . Lungo ogni geodetica possiamo fare i trasportati dei trasportati di  $\omega$ .

In ogni punto, i trasportati di  $\gamma'(0), \omega$  sono ortogonali  $\implies$  formano due campi vettoriali ortogonali in un intorno di  $P$ : chiamiamoli rispettivamente  $X$  e  $Y$ . Ma allora, per costruzione,  $\tilde{x}$  ha le proprietà richieste. □

### 3.6.3 Minimizzazione delle lunghezze

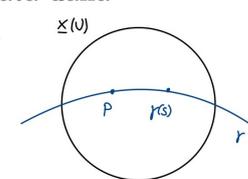
**Proposizione 3.6.3** (Slogan: “Le geodetiche minimizzano localmente le lunghezze”).

Data  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  geodetica tale che  $\gamma(0) = P$ ,  $\exists U_P \subset \Sigma$  intorno per cui  $\forall Q \in U_P \cap \text{traccia}(\gamma)$  e  $\forall \alpha : [0, 1] \rightarrow U_P$  curva, con  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha(1) = Q$ , si ha  $\ell(\alpha; P, Q) \geq \ell(\gamma; P, Q)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subset \Sigma$  la parametrizzazione regolare intorno a  $P$  data dalla

**Proposizione 3.6.2:** vogliamo anzitutto dimostrare che  $E_v \equiv 0$ . Su un intorno di  $P$ , prendiamo  $\gamma(s) = \underline{x}(u(s), v_0)$ , con  $u'(s) > 0$ . Derivando otteniamo

$$\gamma'(s) = u'(s)\underline{x}_u(u(s), v_0), \text{ cioè } \underline{x}_u(u(s)) = \frac{1}{u'(s)}\gamma'(s)$$



e sostituendo con l'inversa di  $u$ :  $\begin{matrix} s & \longmapsto & u(s) \\ s(u) & \longleftarrow & u \end{matrix}$  si ottiene, visto che  $u'(s)s'(u(s)) = 1$ ,

$$\underline{x}_u(u, v_0) = s'(u)\gamma'(s(u))$$

Quindi, derivando e ricordando che  $\gamma'(s(u)) \perp \underline{x}_v$  e inoltre  $\gamma'' \perp \mathcal{T}\Sigma \iff 0 = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \underbrace{(D_{\gamma'} \gamma')}_{\gamma''}^T$  si ha:

$$\underline{x}_{uu} = s''(u)\gamma'(s(u)) + s'(u)^2\gamma''(s(u)) \implies \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v = \underbrace{s''(u)\gamma'(s(u)) \cdot \underline{x}_v}_0 + \underbrace{s'(u)^2\gamma''(s(u)) \cdot \underline{x}_v}_0 \equiv 0$$

Vale quindi che

$$0 \equiv F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \implies 0 \equiv F_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uv} \\ \implies E_v = (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_v = 2\underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u = -2\underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v \equiv 0 \implies E(u, v) = E(u)$$

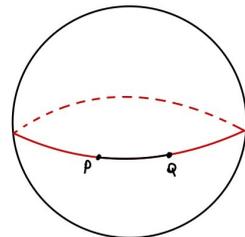
Consideriamo ora  $\alpha : [a, b] \rightarrow \underline{x}(U)$  tale che  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , allora

$$\ell(\alpha; P, Q) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + G(v')^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{E}|u'(t)| dt$$

Presa  $\beta(t) := \underline{x}(u(t), 0)$ , ossia la prima coordinata di  $\alpha$ , questa parametrizza la parte della una curva da  $P$  a  $Q$  nella traccia di  $\gamma$ , dunque

$$\ell(\gamma; P, Q) = \ell(\beta; P, Q) = \int_a^b \sqrt{E(u(t))}|u'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E}|u'(t)| dt \leq \ell(\alpha; P, Q) \quad \square$$

**Osservazione 17.** *Le geodetiche non minimizzano le lunghezze globalmente: come in figura, la “parte lunga” dell’equatore è una geodetica che ovviamente non minimizza la lunghezza.*



**Definizione 3.6.2.** *Su una superficie orientata  $(\Sigma, \underline{n})$  possiamo avere:*

- le curve  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  le cui tangenti sono tutte direzioni principali, cioè tali che  $\alpha'(t)$  genera una direzione principale, si dicono **linee di curvatura**
- le curve  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  le cui tangenti sono rette isotrope per la seconda forma fondamentale di  $\Sigma$ , cioè tali che  $\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \equiv 0$ , si dicono **linee asintotiche**.
- (ricordiamo) le curve  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  tali che  $\nabla_{\alpha'} \alpha' \equiv 0$  si dicono **geodetiche**.

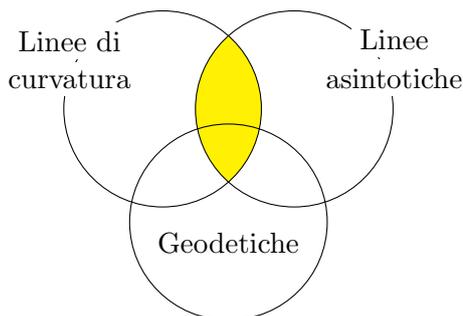
Domanda: esistono curve regolari  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  che sono sia linee di curvatura che linee asintotiche?

Una curva  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  p.l.a. è una linea di curvatura se e solo se  $S(\alpha'(t)) \in \text{Span}(\alpha'(t))$ .

Una curva  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  p.l.a. è una linea asintotica se e solo se  $\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = S(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$ .

Dunque  $S(\alpha'(t)) \equiv 0 \iff -(\underline{n} \circ \alpha)'(t) \equiv 0 \\ \iff \underline{n} \circ \alpha = \underline{n}_0 \text{ costante}$

Quindi  $\underline{n}_0 \perp \mathcal{T}_{\alpha(t)}\Sigma \iff \alpha'(t) \cdot \underline{n}_0 = 0 \forall t \\ \iff \alpha(t) \cdot \underline{n}_0 \text{ costante}$



Risposta: le curve regolari che sono sia linee di curvatura che linee asintotiche sono planari.

Domanda: esistono curve regolari  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  che sono sia linee asintotiche che geodetiche?

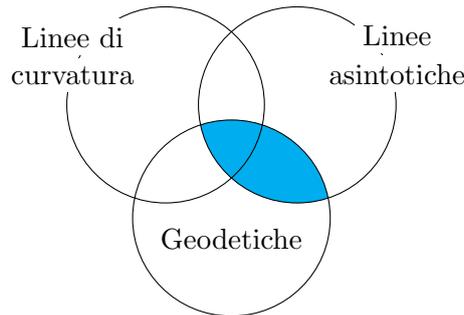
Una curva  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  p.l.a. è una linea asintotica se e solo se  $\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = S(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$ .

$\alpha : I \rightarrow \Sigma$  p.l.a. è una geodetica se e solo se  $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$ .

Dunque  $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0 \iff (D_{\alpha'}\alpha')^T = 0 \iff \alpha'' \perp \mathcal{T}\Sigma$

Quindi  $0 = S(\alpha') \cdot \alpha' = -(\underline{n} \circ \alpha)' \cdot \alpha' = \alpha'' \cdot (\underline{n} \circ \alpha)$   
 $\iff \alpha'' \equiv 0 \iff \alpha(t) = av_0 + P_0$

Risposta: le curve regolari che sono sia linee asintotiche e geodetiche sono lineari.

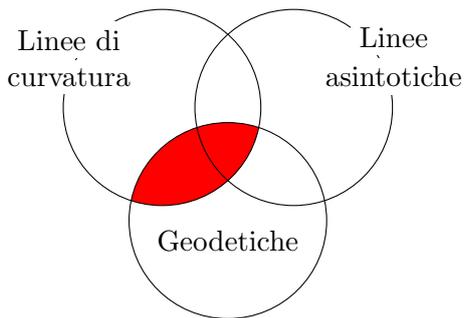


**Esercizio 31.** Se una curva  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  è una geodetica p.l.a., di Frenet, ha curvatura  $\kappa_\alpha > 0$  ed è una linea di curvatura, allora  $\alpha$  è planare.

*Svolgimento.* Certamente  $\alpha'' \perp \mathcal{T}\Sigma$ , ma  $\alpha'' = T' = \kappa_\alpha \cdot N$ , dunque  $N = \pm(\underline{n} \circ \alpha)$ :

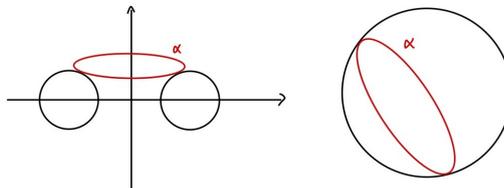
$$S(\alpha') = -(\underline{n} \circ \alpha)' = \lambda T = \pm N' = \pm(-\kappa_\alpha T + \tau_\alpha B)$$

cioè  $\tau_\alpha \equiv 0$  e dunque  $\alpha$  è planare. □



**Esercizio 32.** Mostrare che  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  linea di curvatura e asintotica (oppure di curvatura e geodetica)  $\nRightarrow \alpha$  parametrizza una porzione di retta.

*Svolgimento.* Sia  $\alpha$  la circonferenza di punti parabolici sul toro, dunque  $(\underline{n} \circ \alpha)' \equiv 0 \implies S(\alpha') = 0 \implies \alpha$  è di curvatura e  $\Pi(\alpha', \alpha') = -(\underline{n} \circ \alpha)'(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \implies \alpha$  è asintotica. Inoltre, poiché l'operatore forma di una sfera è l'identità, ogni cerchio massimo su  $S^2$  è di curvatura e una geodetica. □



### 3.7 Teorema di Gauss-Bonnet

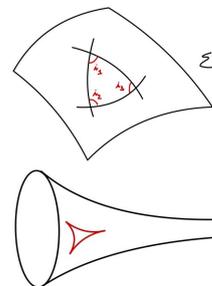
Passiamo dal piano Euclideo  $\mathbb{E}^2$  a una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  e, di conseguenza, dal triangolo al triangolo geodetico che borda una regione  $R \subseteq \underline{x}(U)$  semplicemente connessa, con  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ . Se gli angoli del triangolo  $i_1, i_2, i_3$  sono tali che  $i_1 + i_2 + i_3 = \pi$ , allora sulla superficie

$$i_1 + i_2 + i_3 = \pi + \int_R K \, dA$$

**Corollario 3.7.1.** Nel triangolo geodetico sulla sfera  $S_a^2$ ,  $i_1 + i_2 + i_3 = \pi + \int_R K \, dA > \pi$ .

**Corollario 3.7.2.** Sul piano che ha  $K \equiv 0$ , riotteniamo l'uguaglianza di partenza.

**Corollario 3.7.3.** Sulla superficie dell'Esercizio 23, con  $K < 0$ ,  $i_1 + i_2 + i_3 < \pi$ .



**Definizione 3.7.1.** Una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ , con  $\Sigma$  superficie, si dice **semplice, chiusa e regolare a tratti**,

(i) se  $t, t' \in [a, b]$  sono tali che  $t \neq t'$ , allora  $\alpha(t) = \alpha(t') \iff \{t, t'\} = \{a, b\}$ ;

(ii) se  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = b$ , allora  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è regolare, per  $i = 0, \dots, \ell - 1$ .

**Definizione 3.7.2.** Una regione  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  si dice **semplicemente connessa**, se  $\partial R$  corrisponde alla traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.<sup>17</sup>

**Teorema 3.7.4 (Gauss-Bonnet locale).**

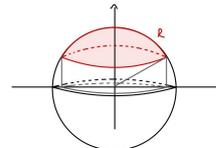
Se  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  è regolare a tratti, con angoli esterni  $0 < \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell < \pi$ , allora

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA + \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j = 2\pi$$

**Osservazione 18.** Il Teorema di Gauss-Bonnet locale generalizza il Corollario 3.7.1.

**Esercizio 33.** Verificare che la formula del Teorema di Gauss-Bonnet locale vale per una calotta sferica di  $S^2$ .

Supponiamo  $R = \{u \leq u_0\} \subseteq S^2$  e  $\partial R = \{u = u_0\}$ , con  $u_0 \in [0, \pi]$ .



*Svolgimento.* 1° caso:  $u_0 < \frac{\pi}{2}$  Sia  $R = \{u \leq u_0\} \subseteq S^2$  la calotta sferica, con  $\partial R = \{u = u_0\}$ .

Abbiamo già visto che il parallelo  $\{u = u_0\}$  ha curvatura geodetica  $\kappa_g = \cot(u_0)$ .  $R$  è il grafico di  $\sqrt{1 - u^2 + v^2}$  sul disco di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sin u_0$ :  $R \subseteq \underline{x}(U)$ , con  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$  e

$$\underline{x}: U \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 + v^2}) :$$

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = \frac{\cos u_0}{\sin u_0} \int_{\partial R} ds = \frac{\cos u_0}{\sin u_0} 2\pi \sin u_0 = 2\pi \cos u_0$$

$\underline{x}_u = (1, 0, \frac{1}{2}(-2u)(1 - u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}})$ ,  $\underline{x}_v = (0, 1, -v(1 - u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}})$ , dunque

$$E = 1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2}, \quad F = \frac{uv}{1 - u^2 - v^2}, \quad G = 1 + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} \implies EG - F^2 = \frac{1}{1 - u^2 - v^2}$$

$$\begin{aligned} \int_R K dA &= \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} du dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sin u_0} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = \\ &= 2\pi \left[ -\sqrt{1 - r^2} \right]_0^{\sin u_0} = 2\pi - 2\pi \cos u_0 = 2\pi - \int_{\partial R} \kappa_g ds \end{aligned}$$

2° caso:  $u_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA = 0 + 2\pi = 2\pi$$

3° caso:  $u_0 > \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = \cot u_0 2\pi \sin(\pi - u_0) = 2\pi \cos u_0$$

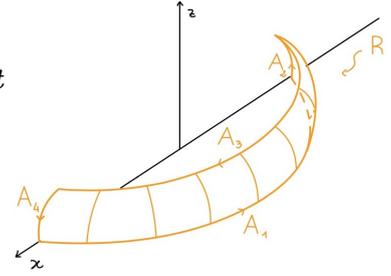
$$\int_R K dA = \text{Area}(R) = 4\pi - \text{Area}(S^2 \setminus R) = 4\pi - 2\pi - 2\pi \cos u_0 = 2\pi - 2\pi \cos u_0$$

perché  $\text{Area}(S^2 \setminus R) = \int_{S^2 \setminus R} K dA = 2\pi - 2\pi \cos(\pi - u_0) = 2\pi + 2\pi \cos(u_0)$ . □

<sup>17</sup>Vogliamo che la curva lasci  $R$  alla sua sinistra (rispetto a  $\underline{n}_x$ ).

**Esercizio 34.** Verificare che la formula del **Teorema di Gauss-Bonnet locale** vale per la regione  $R = \underline{x}([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi])$  del toro  $\mathbb{T}_{5,2}$ , con

$$\underline{x}(u, v) = ((5 + 2 \cos u) \cos v, (5 + 2 \cos u) \sin v, 2 \sin u)$$



*Svolgimento.*  $\partial R$  è una curva semplicemente connessa regolare a tratti, in cui i tratti sono:

- $A_1 = \{\underline{x}(0, t) \mid 0 \leq t \leq \pi\}$  è una geodetica con  $\kappa_g = 0$ ;
- $A_2 = \{\underline{x}(t, \pi) \mid 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\}$  è una geodetica con  $\kappa_g = 0$ ;
- $A_3 = \{\underline{x}(\frac{\pi}{2}, \pi - t) \mid 0 \leq t \leq \pi\}$  è una linea di curvatura e asintotica;
- $A_4 = \{\underline{x}(\frac{\pi}{2}, 0) \mid 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$  è una geodetica con  $\kappa_g = 0$ .

Vogliamo verificare che  $\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = 2\pi$ , ma  $\varepsilon_i = \frac{\pi}{2} \forall i = 1, 2, 3, 4$ , dunque  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = 2\pi$  e, di conseguenza,  $\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA = 0$ . Chiaramente  $\int_{\partial R} \kappa_g ds = \int_{A_3} \kappa_g ds$ :  $A_3$  sarà data da  $\alpha(t) = (5 \cos(\pi - t), 5 \sin(\pi - t), 2)$ , dunque  $\alpha'(t) = (5 \sin(\pi - t), -\cos(\pi - t), 0)$ , da cui otteniamo la parametrizzazione p.l.a.  $\beta(s) = (5 \cos(\pi - \frac{s}{5}), 5 \sin(\pi - \frac{s}{5}), 2)$ .  $T(s) = (\sin(\pi - \frac{s}{5}), -\cos(\pi - \frac{s}{5}), 0)$  e  $\dot{T}(s) = -\frac{1}{5}(\cos(\pi - \frac{s}{5}), \sin(\pi - \frac{s}{5}), 0)$ , perciò, se  $\underline{n} \equiv (0, 0, 1)$ , allora

$$\kappa_g = \dot{T} \cdot (\underline{n} \times T) = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} \cos(\pi - \frac{s}{5}) & \sin(\pi - \frac{s}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\pi - \frac{s}{5}) & -\cos(\pi - \frac{s}{5}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-1) = -\frac{1}{5}$$

dunque

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = \int_{A_3} \kappa_g ds = -\frac{1}{5} 5\pi = -\pi$$

Infine, abbiamo già calcolato  $E = 4$ ,  $F \equiv 0$  e  $G = (5 + 2 \cos u)^2$ , mentre  $K = \frac{\cos u}{2(5 + 2 \cos u)}$ , dunque

$$\int_R K dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{2(5 + 2 \cos u)} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{2(5 + 2 \cos u)} du dv = \pi [\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \quad \square$$

**Definizione 3.7.3.** Data  $\widehat{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientata compatta, se  $R \subseteq \widehat{\Sigma}$  è una regione con bordo tale che  $\partial R$  è una curva semplice, chiusa e regolare a tratti, allora  $\Sigma := \widehat{\Sigma} \setminus R$  si dice **superficie con bordo**.

**Teorema 3.7.5 (Radò).**

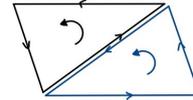
Ogni superficie con bordo  $\Sigma$  orientata ha una triangolazione  $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^m$ , dove  $\Delta_\lambda \subseteq \Sigma$  e  $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^m \Delta_\lambda$ , tale che

(i)  $\Delta_\lambda$  è immagine di un triangolo Euclideo tramite una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  compatibile con l'orientazione<sup>18</sup>  $\forall \lambda = 1, \dots, m$ ;

(ii) se  $\lambda \neq \mu$ , allora  $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice;} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$

<sup>18</sup>  $\underline{x}$  si può assumere ortogonale.

(iii) se  $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu = 1$  lato  $\ell$ , allora le orientazioni su  $\ell$  sono opposte;



$$(iv) \Delta_\lambda \cap \partial R = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice.} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$$

**Osservazione 19.** Nel caso in cui  $\partial R = \emptyset$  (ovvero  $R = \emptyset$ ), l'enunciato rimane valido (senza (iv)).

**Definizione 3.7.4.** Se  $\Sigma$  è una superficie orientata con triangolazione  $\tau = \{\Delta_\lambda\}$ , allora

$$\mathcal{X}(\Sigma, \tau) = V - E + F \quad \text{(Caratteristica di Eulero)}$$

dove  $V =$  numero di vertici,  $E =$  numero di lati e  $F =$  numero di triangoli.

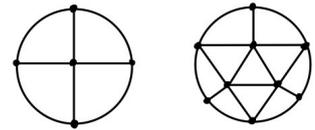
**Fatto 3.7.6.**  $\mathcal{X}(\Sigma, \tau)$  dipende solo da  $\Sigma$ , cioè, se  $\tau \neq \tau'$ , allora  $\mathcal{X}(\Sigma, \tau) = \mathcal{X}(\Sigma, \tau')$ , quindi possiamo scrivere  $\mathcal{X}(\Sigma, \tau) = \mathcal{X}(\Sigma)$ .

In realtà, superfici omotopicamente equivalenti hanno la stessa caratteristica di Eulero.

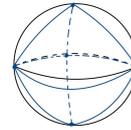
**Fatto 3.7.7.**  $\mathcal{X}(\Sigma)$  è ben definita anche nel caso in cui i triangoli soddisfino (ii), (iii) e (iv), ma i  $\Delta_\lambda$  siano immagini solo omeomorfe a triangoli Euclidei.

**Esempio 29.** Se dividiamo il disco  $D^2$  in 4 “triangoli”, allora  $V = 5$ ,  $E = 8$  e  $F = 4$ , dunque  $\mathcal{X}(D^2) = 1$ .

Se invece lo dividiamo in 10 “triangoli”,  $V = 9$ ,  $E = 18$  e  $F = 10$ , quindi  $\mathcal{X}(D^2) = 1$ .



**Esempio 30.** Su  $S^2$ ,  $V = 5$ ,  $E = 9$  e  $F = 6$ , dunque  $\mathcal{X}(S^2, \tau) = 2$ .



**Fatto 3.7.8.** Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie chiusa (ovvero compatta e senza bordo) e orientabile, allora  $\Sigma \approx$  , dove il “numero di buchi”  $g$  è detto **genere di  $\Sigma$** .

**Fatto 3.7.9.** Se  $\Sigma$  ha genere  $g$ , allora  $\mathcal{X}(\Sigma) = 2 - 2g$ .

**Teorema 3.7.10 (Gauss-Bonnet globale).**

Data  $\Sigma$  una superficie orientata con bordo (possibilmente vuoto) con una triangolazione  $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^m$ , se  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  sono gli angoli esterni di  $\partial\Sigma$ , allora

$$\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dA + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi \mathcal{X}(\Sigma)$$

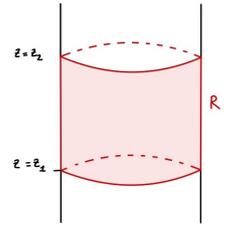
in cui  $\int_{\Sigma} K dA = \sum_{\lambda=1}^m \int_{\Delta_\lambda} K dA$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che il **Teorema di Gauss-Bonnet locale** implica il **Teorema di Gauss-Bonnet globale**. Se poniamo  $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^m \Delta_\lambda$ , allora applichiamo il **Teorema di Gauss-Bonnet locale** a ogni  $\Delta_\lambda$ :

$$\int_{\partial\Delta_\lambda} \kappa_g ds + \int_{\Delta_\lambda} K dA + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{\lambda,i} = 2\pi \implies \int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dA + \sum_{\lambda=1}^m \sum_i \varepsilon_{\lambda,i} = 2\pi F$$

in cui  $\sum_{\lambda=1}^m \sum_i \varepsilon_{\lambda,i} = 2\pi(E - V) +$  somma degli angoli esterni del bordo. □

**Esercizio 35.** Verificare il **Teorema di Gauss-Bonnet** per la regione  $R$  del cilindro limitata da due piani orizzontali.



Svolgimento.

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi \mathcal{X}(R)$$

e infatti  $\mathcal{X}(R) = 8 - 16 + 8 = 0$ .



□

**Esercizio 36.** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie chiusa, orientata e connessa, se  $\Sigma \not\cong S^2$ , allora su  $\Sigma$  esistono punti con  $K > 0$ ,  $K = 0$  e  $K < 0$ .

Svolgimento. Sappiamo che un punto con  $K > 0$  esiste sempre. Se  $\exists Q \in \Sigma$  tale che  $K(Q) < 0$ , allora, per continuità, vale la tesi. Supponiamo quindi  $K \geq 0$ . Per il **Teorema di Gauss-Bonnet**,

$$0 \leq \int_{\Sigma} K dA = 2\pi \mathcal{X}(\Sigma) = 2\pi(2 - 2g)$$

dunque  $0 \neq g \leq 1 \iff g = 1$ , perciò  $0 = \int_{\Sigma} K dA = 2\pi(2 - 2)$ , ma  $K(P) > 0$ , perciò  $\exists Q \in \Sigma$  tale che  $K(Q) < 0$ . □

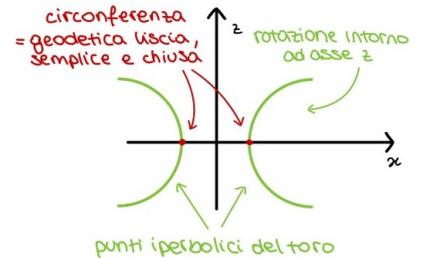
**Esercizio 37.** Dire se può esistere una geodetica chiusa e semplice su una superficie  $\Sigma$  tale che

- (1)  $K(P) > 0 \forall P \in \Sigma$ ;
- (2)  $K(P) = 0 \forall P \in \Sigma$ ;
- (3)  $K(P) < 0 \forall P \in \Sigma$ ,

specificando, in ognuno dei tre casi, se possa essere il bordo di una regione  $R$  semplicemente connessa.

Svolgimento.

- (1) La sfera: sì, sì.
- (2) Il cilindro: sì, no.
- (3) Una porzione di toro: sì, no.



□



**Parte II**  
**Varietà e Grado**



## 4.1 Prime definizioni

Gli oggetti di studio della **Topologia differenziale** sono le **Varietà**, per definire le quali ci servirà la nozione di mappa  $C^\infty$  tra sottoinsiemi arbitrari di spazi Euclidei.

**Definizione 4.1.1.** Dati  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  non vuoti,  $f : X \rightarrow Y$  si dice  $C^\infty$  (o *liscia*), se  $\forall x \in X \exists W \subseteq \mathbb{R}^n$  intorno aperto di  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  funzione  $C^\infty$  tali che  $F|_{W \cap X} = f|_{W \cap X}$ . Inoltre,  $f : X \rightarrow Y$   $C^\infty$  è un **diffeomorfismo**, se è un omeomorfismo e  $f, f^{-1}$  sono entrambe  $C^\infty$ . In tal caso potremo usare la notazione  $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ , oppure  $X \cong Y$  quando  $f$  non è specificata.

**Osservazione 20 (Esercizio).** È facile verificare che:

- 1) se  $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto, allora  $f : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  è  $C^\infty \iff f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  è  $C^\infty$  <sup>1</sup>;
- 2) se  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $g : Y \rightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^p$  sono  $C^\infty$ , allora  $g \circ f : X \rightarrow Z$  è  $C^\infty$ ;
- 3) se  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  è  $C^\infty$ , allora  $f : X \rightarrow f(X)$  e  $f|_{X'} : X' \rightarrow Y \forall X' \subseteq X$  sono  $C^\infty$ .

**Definizione 4.1.2.** Un sottoinsieme  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  tale che  $\forall x \in M \exists W \subseteq \mathbb{R}^k$  intorno aperto di  $x$  per cui  $W \cap M \cong U$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto e  $m \geq 0$ , si dice **varietà  $C^\infty$  di dimensione  $m$**  (o  *$m$ -varietà*). Un diffeomorfismo  $f : W \cap M \xrightarrow{\cong} U$  si dice **carta locale** (o **sistema di coordinate**) e l'inversa  $f^{-1} : U \xrightarrow{\cong} W \cap M$  si dice **parametrizzazione locale** intorno a  $x$ .

Quando  $m = 0$ , per convenzione, si richiede  $W \cap M = \{x\}$  invece di  $W \cap M \cong U$ .

**Esempio 31.** Un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  è una varietà di dimensione  $m$ .

**Esempio 32.** Una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una varietà di dimensione 2.

Infatti, dato  $x \in \Sigma$ , sappiamo che  $\Sigma$  è un “grafico” intorno a  $x$ . Supponiamo, senza perdita di generalità, che lo sia rispetto alla proiezione sul piano  $xy$  e sia  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  una parametrizzazione regolare intorno a  $x$  tale che  $\pi \circ \underline{x} : U \xrightarrow{\cong} A$  è un diffeomorfismo, dove  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è aperto e  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

Notiamo che  $\pi|_{\underline{x}(U)} : \underline{x}(U) \rightarrow A$  è  $C^\infty$  in quanto restrizione di  $\pi$ , inoltre, la sua inversa è  $\underline{x} \circ (\pi \circ \underline{x})^{-1}$ , anch'essa  $C^\infty$ . Quindi  $\underline{x}(U) \cong A$  e  $\Sigma$  è una varietà di dimensione 2.

Ora vogliamo definire lo spazio tangente in un punto di una varietà, iniziando con gli aperti degli spazi Euclidei.

**Definizione 4.1.3.** Dato  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  aperto, lo **spazio tangente** a  $U$  in  $x \in U$  è  $\mathcal{T}_x U := \mathbb{R}^k$ .

<sup>1</sup>Nel senso usuale.

Richiamiamo il differenziale secondo il **Calcolo differenziale**: se  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$  sono aperti,  $f : U \rightarrow V$  è  $C^\infty$ ,  $x \in U$  e  $h \in \mathbb{R}^k$ , allora  $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è lineare e ha matrice Jacobiana  $J(f)_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_x$ .

Ricordiamo alcune **proprietà** di base del differenziale:

- $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ ;
- se  $\text{Id}_U : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ , allora  $d(\text{Id})_x = \text{Id}_{\mathbb{R}^k} \forall x \in U$ ;
- dati  $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$  aperti e  $i : U' \hookrightarrow U$  la mappa di inclusione,  $(di)_x = \text{Id}_{\mathbb{R}^k} \forall x \in U'$ ;
- se  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è lineare, allora  $dL_x = L \forall x \in \mathbb{R}^k$ .

**Proposizione 4.1.1.** *Dati  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$  aperti, se  $f : U \xrightarrow{\cong} V$  è un diffeomorfismo, allora  $k = \ell$  e  $df_x$  è un isomorfismo  $\forall x \in U$ .*

*Dimostrazione.* Detta  $g : V \rightarrow U$  l'inversa di  $f$ ,

$$g \circ f = \text{Id}_U \implies \text{Id}_{\mathbb{R}^k} = d(\text{Id}_U)_x = d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x \implies df_x \text{ è iniettiva}$$

$$f \circ g = \text{Id}_V \implies \text{Id}_{\mathbb{R}^\ell} = d(\text{Id}_V)_{f(x)} = d(f \circ g)_{f(x)} = df_x \circ dg_{f(x)} \implies df_x \text{ è surgettiva}$$

dunque  $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è sia iniettiva che suriettiva, perciò  $df_x$  è un isomorfismo e  $k = \ell$ . □

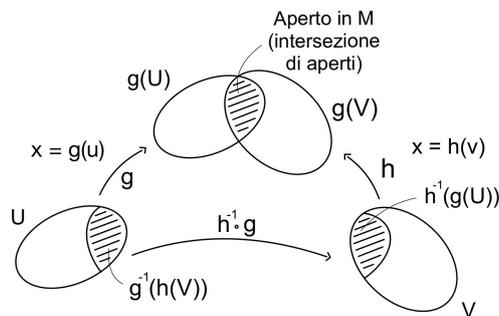
Ora passiamo alla definizione di spazio tangente in un punto di una varietà.

**Definizione 4.1.4.** *Data  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  varietà  $C^\infty$  tale che  $\dim M = m$ , con  $x \in M$ , e  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, se  $g : U \xrightarrow{\cong} W \cap M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una parametrizzazione locale intorno a  $x$ , allora lo **spazio tangente** di  $M$  in  $x$  è  $\mathcal{T}_x M := dg_u(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^k$ .*

Dobbiamo verificare che questa è una buona definizione: siano  $g : U \xrightarrow{\cong} g(U) \subseteq M$  e  $h : V \xrightarrow{\cong} h(V) \subseteq M$  due parametrizzazioni regolari intorno a  $x$ :  $h^{-1} \circ g$  è un diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi, dunque

$$dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_v \circ \underbrace{d(h^{-1} \circ g)_u}_{\text{isomorfismo}}$$

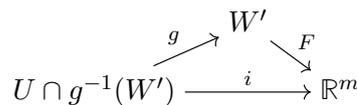
quindi  $\text{Imm}(dg_u) = \text{Imm}(dh_v)$ .



**Proposizione 4.1.2.** *Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà tale che  $\dim M = m$ , allora  $\dim \mathcal{T}_x M = m \forall x \in M$ .*

*Dimostrazione.* Dato  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, se  $g : U \xrightarrow{\cong} W \cap M$  è una parametrizzazione locale, allora  $\exists x \in W'$ , con  $W' \subseteq W$  aperto, e  $F : W' \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^\infty$  tali che

$F|_{W' \cap M} = g^{-1}|_{W' \cap M}$ , dunque  $(di)_u = \text{Id}_{\mathbb{R}^m} = dF_x \circ dg_u$ , perciò  $dg_u$  è iniettiva e quindi  $\dim \mathcal{T}_x M = m$ .



Adesso vogliamo definire il differenziale di mappe  $C^\infty$  tra varietà.

**Definizione 4.1.5.** *Date  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$  varietà, se  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$ , allora  $\exists W \subseteq \mathbb{R}^k$  intorno aperto di  $x \in M$  e  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  tale che  $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$ . Il **differenziale** di  $f$  in  $x$  è dunque la mappa  $df_x := dF_x|_{\mathcal{T}_x M} : \mathcal{T}_x M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ .*

**Lemma 4.1.3.**  *$df_x$  è ben definito e  $df_x(\mathcal{T}_x M) \subseteq \mathcal{T}_{f(x)} N$ .*

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che  $df_x$  non dipende dall'estensione  $F$ , ma solo da  $f$ . Supponiamo che  $\dim M = m$  e fissiamo  $g : U \rightarrow M$  e  $h : V \rightarrow N$  due parametrizzazioni locali intorno, rispettivamente, a  $x \in M$  e  $y \in N$ . A meno di cambiare  $U$ , possiamo supporre che  $g(U) \subseteq W$ . Abbiamo quindi il diagramma commutativo di mappe  $C^\infty$  a fianco. Dunque

$$dF_x(\underbrace{dg_u(\mathbb{R}^m)}_{\mathcal{T}_x M}) = dh_v(d(h^{-1} \circ f \circ g)_u(\mathbb{R}^m)) \subseteq \text{Imm}(dh_v) = \mathcal{T}_y N$$

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^\ell \\ g \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

$$\implies dF_x|_{\mathcal{T}_x M} = \underbrace{dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}}_{\text{non dipende da } W \text{ né da } F}$$

□

**Esercizio 38.** Verificare le seguenti **proprietà** dei differenziali di mappe tra varietà:

1.  $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ ;
2. se  $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ , allora  $d(\text{Id}_M)_x = \text{Id}_{\mathcal{T}_x M} \forall x \in M$ ;
3. se  $M' \subseteq M$  sono varietà e  $i : M' \hookrightarrow M$  è la mappa di inclusione data da  $d(i)_x$ , allora  $\mathcal{T}_x M' \subseteq \mathcal{T}_x M$  come sottospazio.

**Osservazione 21.** Se  $f : M \xrightarrow{\cong} N$  è un diffeomorfismo di varietà, allora  $df_x : \mathcal{T}_x M \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_{f(x)} N$  è un isomorfismo  $\forall x \in M$ .

**Definizione 4.1.6.** Data  $f : M \rightarrow N$  mappa  $C^\infty$  tra varietà, con  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ , se  $\text{rank}(df_x) < n$ , allora  $x \in M$  è un **punto critico** per  $f$ , altrimenti si dice **punto regolare**.

Se  $y \in N$  è immagine di un punto critico, allora è un **valore critico** di  $f$ , altrimenti si dice **valore regolare**. In particolare, se  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , allora  $y$  è un valore regolare.

Nel seguito supponiamo  $m = \dim M = \dim N = n$ .

**Proposizione 4.1.4.** Data  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ ,

- ① se  $x \in M$  è un punto regolare per  $f$ , allora la restrizione di  $f$  è un diffeomorfismo tra un intorno di  $x$  e un intorno di  $f(x)$ ;
- ② se  $M$  è compatta e  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , allora  $|f^{-1}(y)| < +\infty$ .

*Dimostrazione.* ① A meno di restringere  $U$ , possiamo supporre  $f(g(U)) \subseteq h(V)$ . Se  $g : U \rightarrow g(U) \subseteq M$  è una parametrizzazione locale intorno a  $x$  e  $h : V \rightarrow h(V) \subseteq N$  è una parametrizzazione locale intorno a  $y$ , allora  $df_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u$ <sup>2</sup>. Per il **Teorema della funzione inversa**,

$$h^{-1} \circ f \circ g|_{U'} : U' \xrightarrow{\cong} V' \implies f|_{g(U')} = h|_{V'} \circ (h^{-1} \circ f \circ g)|_{U'} \circ g^{-1}|_{g(U')} : g(U') \xrightarrow{\cong} h(V')$$

② Poiché  $f^{-1}(y) \subseteq M$  è chiuso in un compatto, è compatto e inoltre è discreto, perché, per ①, possiamo definire un diffeomorfismo:  $\exists U$  intorno di  $x \in f^{-1}(y)$  tale che  $f|_U : U \xrightarrow{\cong} f(U)$ , con  $y \in f(U)$ , e  $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$ , perciò  $|f^{-1}(y)| < +\infty$ . □

**Lemma 4.1.5 (Pila di dischi).**

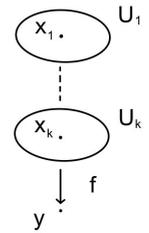
Date  $M, N$  varietà, se  $M$  è compatta,  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$  e  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , allora  $\exists V \subseteq N$  intorno di  $y$  tale che  $|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)| \forall y' \in V$ .

*Dimostrazione.* Se  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  e  $f|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} f(U_i) =: V_i$ , con  $U_i$  intorno di  $x_i$  e  $i = 1, \dots, k$ , allora

---

<sup>2</sup> $dg_u$  e  $dh_v$  sono isomorfismi.

$$V := \left( \bigcap_{i=1}^k V_i \right) \setminus f \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \right)$$



ma  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$  è chiuso in un compatto e quindi compatto,  $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i)$  è immagine di un compatto, perciò compatto in uno spazio  $T_2$ , dunque è chiuso e, di conseguenza,  $V$  è aperto. □

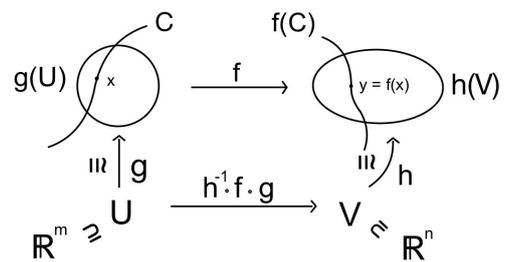
Adesso supponiamo  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$  qualunque.

**Teorema 4.1.6.** *Se  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$ , allora l'insieme dei valori regolari di  $f$  è denso in  $N$ .*

*Dimostrazione.* Useremo (senza dimostrare) il seguente

**Teorema 4.1.7 (Brown).** *Dato  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $C^\infty$ , allora l'insieme dei valori regolari di  $f$  è denso in  $\mathbb{R}^n$ .*

Sia  $C = \{x \in M \mid \text{rank}(df_x) < n = \dim N\} \subseteq M$  l'insieme dei punti critici di  $f$ . Possiamo supporre che  $f(g(U)) \subseteq h(V)$ , con  $g^{-1}(C) = \{\text{punti critici di } h^{-1} \circ f \circ g\}$ , dunque



$$V \setminus h^{-1} \circ f \circ g(g^{-1}(C)) = V \setminus h^{-1}(f(C))$$

è denso in  $V$ , quindi  $h(V) \setminus f(C)$  lo è in  $h(V)$ , perciò  $N \setminus f(C) = \{\text{valori regolari di } f\}$  è denso in  $N$ . □

**Lemma 4.1.8.** *Se  $M, N$  sono varietà tali che  $\dim M = m \geq \dim N = n$ ,  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$  e  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , allora  $f^{-1}(y) \subseteq M$  è una varietà di dimensione  $m - n$ .*

*Dimostrazione.* Se  $x \in f^{-1}(y)$ , poiché  $y$  è regolare, allora  $df_x : \mathcal{T}_x M \rightarrow \mathcal{T}_y N$ . Poniamo dunque  $K := \text{Ker}(df_x) \subseteq \mathcal{T}_x M \subseteq \mathbb{R}^k$ , dove  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $\dim K = m - n$ , e sia  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$  lineare, con  $L|_K : K \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{m-n}$  isomorfismo.

**Esercizio 39.** *Se  $N, N'$  sono varietà tali che  $\dim N = n$  e  $\dim N' = n'$ , allora  $N \times N'$  è una varietà tale che  $\dim(N \times N') = n + n'$  e  $\mathcal{T}_{(y,y')}(N \times N') \cong \mathcal{T}_y N \oplus \mathcal{T}_{y'} N'$ .*

**Esercizio 40.** *Se  $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ ,  $x \mapsto (f(x), L(x))$ , allora  $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ .*

Notiamo che, se  $df_x(v) = L(v) = 0$ , allora  $v = 0$ , quindi, poiché  $x \in M$  è regolare per  $F$ ,  $\exists U \subseteq M$  intorno di  $x$  tale che  $F|_U : U \xrightarrow{\cong} V$  sia un diffeomorfismo, con  $V$  intorno di  $F(x) = (y, L(y))$ .  $V \cap (y \times \mathbb{R}^{m-n})$  è diffeomorfo a un aperto di  $\mathbb{R}^{m-n}$  e  $F$  dà un diffeomorfismo tra  $F^{-1}(V \cap (y \times \mathbb{R}^{m-n}))$ , intorno di  $x$  in  $f^{-1}(y)$ , e  $V \cap (y \times \mathbb{R}^{m-n})$ . Quindi  $f^{-1}(y)$  è una varietà di dimensione  $m - n$ . □

**Esempio 33.** *La sfera  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  è una varietà di dimensione  $n - 1$ .*

Infatti, la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$  è  $C^\infty$  e  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è rappresentato dal vettore  $(Jf)_x = (2x_1, \dots, 2x_n)$ . Se  $C = \{\text{punti critici di } f\} = \{(0, \dots, 0)\}$ , allora  $1 \in \mathbb{R} \setminus f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  è regolare, perciò  $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} =: S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  è una varietà di dimensione  $n - 1$ .

**Lemma 4.1.9.** *Se  $M, N$  sono varietà tali che  $\dim M = m \geq \dim N = n$ ,  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$  e  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , allora, chiamando la varietà  $M' := f^{-1}(y)$ ,  $\mathcal{T}_x M' = \text{Ker}(df_x) \forall x \in f^{-1}(y)$  e  $df_x|_{(\mathcal{T}_x M')^\perp} : (\mathcal{T}_x M')^\perp \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_y N$ .*

<sup>3</sup>Notiamo che  $\dim(N \times \mathbb{R}^{m-n}) = m = \dim M$ .

$M' \xrightarrow{i} M$   
 Dimostrazione. Questo diagramma  $f_{|_{M'}} \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow f$  di mappe  $C^\infty$  tra varietà è commutativo, quindi  
 $\{y\} \hookrightarrow N$

$df_x|_{\mathcal{T}_x M'} = \{0\}$ , cioè  $\mathcal{T}_x M' \subseteq \text{Ker}(df_x)$ , perciò, poiché  $\dim M' = \dim \text{Ker}(df_x) = m-n$ ,  $\mathcal{T}_x M' = \text{Ker}(df_x)$ . Quindi  $df_x|_{(\mathcal{T}_x M')^\perp} : (\mathcal{T}_x M')^\perp \rightarrow \mathcal{T}_y N$  è iniettiva e dunque è un isomorfismo.  $\square$

**Esempio 34.** Applichiamo il **Lemma 4.1.9** per calcolare gli spazi tangenti delle sfere:

data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$ , sia  $S^{n-1} = f^{-1}(1)$ .  $df_x$  è dato da  $(Jf)_x = (2x_1, \dots, 2x_n)$ , quindi  
 $df_x(v) = 2 \sum_{i=1}^n x_i v_i = 2x \cdot v = 0 \iff v \perp x$ , perciò  $\mathcal{T}_x S^{n-1} = \text{Ker}(df_x) = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Vogliamo arrivare a dimostrare il

**Teorema 4.1.10 (Brower).**

Una mappa continua  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \rightarrow D^n$  ha un punto fisso.

Per fare ciò, dobbiamo ampliare la classe delle varietà in modo da includere  $D^n$ .

### 4.1.1 Applicazione di quanto visto

**Esempio 35.** Il gruppo delle matrici ortogonali  $\mathcal{O}(n)$  è una varietà di dimensione  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Infatti, se  $\mathcal{M}(n) = \{\text{matrici reali } n \times n\} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  e  $f : \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{S}(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  è  $C^\infty$ , dove  
 $\mathcal{S}(n) = \{\text{matrici simmetriche } n \times n\}$ , allora  $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\text{Id}) = \{\text{matrici ortogonali } n \times n\} \subseteq \mathcal{M}(n)$ . Se  $A \in f^{-1}(\text{Id})$ , allora

$$df_A(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(A + \varepsilon B) - f(A)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon B)^t - AA^t}{\varepsilon} = AB^t + BA^t$$

Questa applicazione è surgettiva: data  $C \in \mathcal{S}(n)$  e  $A \in \mathcal{O}(n) = f^{-1}(\text{Id})$ , possiamo trovare  $B \in \mathcal{M}(n)$  tale che  $AB^t + BA^t = C$ . Se  $C = \frac{1}{2}C + (\frac{1}{2}C)^t$ , allora basta trovare  $B$  tale che  $BA^t = \frac{1}{2}C$ . Ad esempio,  $B = \frac{1}{2}CA$  funziona, dunque  $df_A : \mathcal{T}_A \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Id}} \mathcal{S}(n)$  è surgettivo  $\forall A \in f^{-1}(\text{Id})$  e quindi  $f^{-1}(\text{Id}) = \mathcal{O}(n)$  è una varietà di dimensione  $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

## 4.2 Varietà con bordo

**Definizione 4.2.1.** Sia  $H^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$  che si dice **semispazio superiore**.

**Definizione 4.2.2.**  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una **varietà con bordo** di dimensione  $m$ , se ogni  $x \in M$  ha un intorno diffeomorfo a un aperto di  $H^m$ .

Tali diffeomorfismi  $g : U \cap H^m \rightarrow g(U \cap H^m) \subseteq M$  si dicono **parametrizzazioni locali**.

Il **bordo** di  $M$  è l'insieme  $\partial M$  dei punti che sono immagine di un punto di  $\partial H^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$  tramite qualche parametrizzazione locale.

### 4.2.1 Spazi tangenti

Data una mappa  $g : U \cap H^m \rightarrow \mathbb{R}^k$   $C^\infty$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, se  $u \in U \cap H^m \setminus \partial H^m$ , allora  $g$  definita su un intorno di  $x$  in  $\mathbb{R}^m$  e  $dg_u$  è l'usuale differenziale. Se  $u \in U \cap \partial H^m$ , allora  $dg_u$  è definita come  $d\tilde{g}_u$ , dove  $\tilde{g}$  è qualche estensione di  $g$  ad un intorno di  $u$  in  $\mathbb{R}^m$ . Questa mappa lineare non dipende dall'estensione scelta di  $g$ : se  $\tilde{g}$  è un'altra estensione e  $\{u_i\}_{i \rightarrow +\infty} \rightarrow u$  è una successione tale che  $x_m(u_i) > 0$ , allora  $d\tilde{g}_{u_i} = d\tilde{g}_u \forall i \gg 0$ , perché  $\tilde{g}$  e  $\tilde{g}$  coincidono su intorni di  $u_i$ , ma quindi

$$d\tilde{g}_u = \lim_{i \rightarrow +\infty} d\tilde{g}_{u_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} d\tilde{g}_{u_i} = d\tilde{g}_u.$$

**Definizione 4.2.3.** *Dati  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  varietà con bordo tale che  $\dim M = m$ ,  $x \in \partial M$  e  $g : U \cap H^m \rightarrow M$  parametrizzazione locale intorno a  $x$  tale che  $g(u) = x$ , con  $u \in U \cap \partial H^m$ , se  $\tilde{g} :=$  estensione di  $g$  a un intorno di  $x$  in  $\mathbb{R}^m$ , allora lo **spazio tangente** a  $M$  in  $x$  è  $\mathcal{T}_x M := d\tilde{g}_u(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^k$ .*

Come nel caso di varietà senza bordo, le mappe  $C^\infty$  tra varietà con bordo hanno differenziali ben definiti e valgono le usuali **proprietà** (in particolare, la regola di composizione).

È naturale aspettarsi che il bordo di una varietà con bordo sia a sua volta una varietà.

**Proposizione 4.2.1.** *Se  $M$  è una varietà con bordo tale che  $\dim M = m$ , allora  $\partial M$  è una varietà (senza bordo) tale che  $\dim \partial M = m - 1$ .*

*Dimostrazione.* Idea:  $\partial H^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$ , dunque, dato  $x \in \partial M$ , se  $g : U \cap H^m \rightarrow M$  è una parametrizzazione locale tale che  $g(u) = x$ , con  $u \in U \cap \partial H^m$ , allora la restrizione

$$g|_{U \cap \partial H^m} : U \cap \partial H^m \xrightarrow{\cong} g(U \cap \partial H^m) \subseteq M$$

è un diffeomorfismo, quindi, se  $g(U \cap \partial H^m) \cong g(U \cap H^m) \cap \partial M$ , allora  $\partial M$  sarebbe una varietà tale che  $\dim \partial M = m - 1$ .

Per costruzione, è ovvio che  $g(U \cap \partial H^m) \subseteq g(U \cap H^m) \cap \partial M$ .

Per assurdo, sia  $y \in g(U \cap H^m) \cap \partial M$  tale che  $y \notin g(U \cap \partial H^m)$ . Per definizione di  $\partial M$ ,  $\exists h : V \cap H^m \rightarrow M$  parametrizzazione locale tale che  $h(v) = y$ , con  $v \in V \cap \partial H^m$ . Inoltre,  $y = g(u)$ , con  $u \in U \cap H^m \setminus \partial H^m$ ,

dunque  $h^{-1} \circ g : U \cap H^m \rightarrow V \cap H^m$  è  $C^\infty$  e  $d(h^{-1} \circ g)_u$  è un isomorfismo per costruzione, perciò

$h^{-1} \circ g$  si estende ad un diffeomorfismo da un intorno  $U'$  di  $u$  ad un intorno  $V'$  di  $v$ . Questo però non è possibile, perché in tal caso esisterebbero punti di  $V'$  provenienti da  $U' \setminus H^m$ , ma, per costruzione, tutti i punti di  $V'$  devono provenire da  $U' \cap H^m$ .  $\square$

**Lemma 4.2.2.** *Date  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  varietà senza bordo tale che  $\dim M = m$  e  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ , se  $0 \in \mathbb{R}$  è un valore regolare per  $g$ , allora  $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$  è una varietà con bordo  $g^{-1}(0)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\{g > 0\} \subseteq M$  è un aperto, allora è una varietà con carte locali date dalle intersezioni con le carte locali di  $M$ . Sia ora  $x \in g^{-1}(0)$ :  $0$  è un valore regolare per  $g$ , perciò  $\dim \text{Ker}(dg_x) = m - 1$ .

$L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  è lineare tale che  $L|_{\text{Ker}(dg_x)}$  è un isomorfismo e  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$  è tale che  $x \mapsto (L(x), g(x))$

$dF_x$  è un isomorfismo, dunque  $F$  induce un diffeomorfismo tra un intorno  $U$  di  $x$  in  $M$  e un intorno  $V$  di  $(L(x), 0)$  in  $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ , ma

$$F^{-1}((\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cap V) = H^m \cap V = U \cap \{g \geq 0\}$$

quindi  $F$  induce una carta locale intorno a  $x$ .  $\square$

**Esempio 36.**  $D^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^m$  è una varietà con bordo  $\partial D^m = S^{m-1}$ .

Infatti,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^m x_i^2$  è  $C^\infty$ ,  $D^m = \{g \geq 0\}$  e  $0 \in \mathbb{R}$  è un valore regolare per  $g$ , dunque,

infine,  $g^{-1}(0) = S^{m-1}$ .

**Lemma 4.2.3.** *Date  $M, N$  varietà tali che  $\dim M = m \geq \dim N = n$  e  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ , se  $M$  ha bordo e  $y \in N$  è un valore regolare sia per  $f$  che per  $f|_{\partial M}$ , allora  $f^{-1}(y)$  è una varietà di dimensione  $m - n$  con bordo  $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$ .*

*Dimostrazione.* Usando le parametrizzazioni locali, ci si riduce a dimostrare l'enunciato per  $M = H^m$  e  $N = \mathbb{R}^n$ :  $y \in \mathbb{R}^n$  è dunque regolare per  $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e per  $f|_{\partial H^m}$ . Dato  $\bar{x} \in f^{-1}(y)$ , se  $\bar{x} \in \text{Int}(H^m)$ , allora il ragionamento già fatto per varietà senza bordo mostra che  $f^{-1}(y)$  è una varietà in un intorno di  $\bar{x}$ . Se  $\bar{x} \in \partial H^m$ , allora consideriamo  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  intorno aperto di  $\bar{x}$ , un'estensione  $C^\infty$  di  $f$  tale che  $g|_{U \cap H^m} = f|_{U \cap H^m}$ . A meno di restringere  $U$ , possiamo supporre che  $g$  non abbia punti critici

in  $U$ , quindi,  $g^{-1}(y) \subseteq U$  è una varietà di dimensione  $m - n$ , per quanto già visto. Se  $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$  è restrizione di  $\pi : \begin{matrix} H^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & x_m \end{matrix}$ , allora  $f^{-1}(y) \cap U = \{x \in g^{-1}(y) \mid \pi(x) \geq 0\}$ .  $H^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$   
 $\uparrow \searrow$   
 $\partial H^m \xrightarrow{f_{\partial H^m}}$   
 Per concludere, basta verificare che  $0 \in \mathbb{R}$  è un valore regolare per  $\pi|_{g^{-1}(y)}$ : abbiamo  $(\pi|_{g^{-1}(y)})^{-1}(0) = f^{-1}(y) \cap \partial H^m$ . Se  $\bar{x} \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$ , allora  $\mathcal{T}_{\bar{x}}g^{-1}(y) = \text{Ker}(dg_{\bar{x}}) = \text{Ker}(df_{\bar{x}})$  ha dimensione  $m - n$ , perché  $y$  è un valore regolare per  $f$ . Dunque  $y$  è valore regolare per  $f|_{\partial H^m}$  e  $K := \text{Ker}(d(f|_{\partial H^m})_{\bar{x}}) = \text{Ker}(df_{\bar{x}}|_{\mathcal{T}_{\bar{x}}\partial H^m})$  ha dimensione  $m - n - 1$ , ma  $m - n - 1 < m$ , perciò  $\text{Ker}(dg_{\bar{x}}) \not\subseteq \mathcal{T}_{\bar{x}}\partial H^m = \text{Ker}(d\pi_{\bar{x}})$ , quindi  $d\pi_{\bar{x}}|_{\mathcal{T}_{\bar{x}}g^{-1}(y)} \neq 0$  e di conseguenza  $0$  è un valore regolare per  $\pi$ .  
 In conclusione,  $f^{-1}(y) \cap U$  è una varietà di dimensione  $m - n$  con bordo  $\partial f^{-1}(y) \cap \partial H^m = \pi^{-1}(0)$ .  $\square$

**Fatto 4.2.4.** Ogni varietà compatta di dimensione 1 (con o senza bordo) è diffeomorfa a un'unione finita di copie di  $S^1$  e di intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$ .  
 (Una dimostrazione si trova nell'appendice del Milnorino.)



**Lemma 4.2.5.** Se  $M$  è una varietà compatta con bordo, allora  $\#f : M \rightarrow \partial M$  applicazione  $C^\infty$  tale che  $f|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $\exists f : M \rightarrow \partial M$  i cui valori regolari in  $\partial M$  siano densi e sia  $y \in \partial M$  uno di essi. Poiché  $f|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$ ,  $y$  è regolare anche per  $f|_{\partial M}$ , quindi, per quanto visto,  $f^{-1}(y)$  è una varietà compatta di dimensione  $\dim M - \dim \partial M = 1$  con  $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M = \{y\}$ . Per il **Fatto 4.2.4**, è assurdo, perché i bordi di varietà di dimensione 1 hanno un numero pari di punti.  $\square$

**Corollario 4.2.6.** L'identità  $\text{Id}_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  non si estende a una mappa  $C^\infty D^n \rightarrow S^{n-1}$ .

**Lemma 4.2.7.**  $\forall g : D^m \rightarrow D^m$  mappa  $C^\infty \exists x \in D^m$  tale che  $g(x) = x$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $g : D^m \rightarrow D^m$   $C^\infty$  senza punti fissi. Possiamo usare  $g$  per costruire una  $f : D^m \rightarrow S^{m-1}$  mappa  $C^\infty$  tale che  $f|_{S^{m-1}} = \text{Id}_{S^{m-1}}$ : per  $x \in D^m$ , sia  $u = \frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|} \in S^{m-1}$ .<sup>5</sup> Vogliamo costruire  $f$  della forma  $f(x) = x + tu$ . Ricaviamo  $t$ :

$$1 = (x + tu) \cdot (x + tu) = x \cdot x + 2(x \cdot u)t + (u \cdot u)t^2 \implies t = -x \cdot u \pm \sqrt{(x \cdot u)^2 - x \cdot x + 1}$$

Se  $(x \cdot u)^2 - x \cdot x + 1 = 0$ , allora  $x \cdot x = 1$ , cioè  $x \in S^{m-1}$ , ma, in tal caso,  $x \cdot u = \frac{x \cdot x - g(x) \cdot x}{\|x - g(x)\|} > 0$  e inoltre  $t = 0$ , dunque  $f(x) = x$ . Questo mostra che  $f$  è  $C^\infty$  e tale che  $f|_{S^{m-1}} = \text{Id}_{S^{m-1}}$ , ma ciò è assurdo, per il **Lemma 4.2.5**.  $\square$

**Teorema 4.2.8 (Brower).** Ogni mappa continua  $G : D^m \rightarrow D^m$  ha almeno un punto fisso  $\forall m \geq 1$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $D^m$  è compatto, usiamo il seguente

**Teorema 4.2.9 (Approssimazione di Weierstrass).**

$\forall \varepsilon > 0 \exists P_1(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  funzione polinomiale tale che  $\|P_1(x) - G(x)\| < \varepsilon \forall x \in D^m$ .

Notiamo che  $\forall x \in D^m \|P_1(x)\| \leq \|P_1(x) - G(x)\| + \|G(x)\| < \varepsilon + 1$ , dunque, posto  $P(x) = \frac{P_1(x)}{\varepsilon + 1}$  tale che  $P|_{D^m} : D^m \rightarrow D^m$ , supponiamo, per assurdo, che  $G(x) - x \neq 0 \forall x \in D^m$  e, di conseguenza, chiamiamo  $\mu := \min_{x \in D^m} \|G(x) - x\| > 0$ . Scelto  $\varepsilon > 0$  tale che  $\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} < \mu$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \|P(x) - G(x)\| &= \left\| \frac{P_1(x)}{\varepsilon + 1} - G(x) \right\| = \frac{1}{\varepsilon + 1} \|P_1(x) - (\varepsilon + 1)G(x)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon + 1} (\|P_1(x) - G(x)\| + \|\varepsilon G(x)\|) < \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} < \mu \end{aligned}$$

ma, per  $\varepsilon \sim 0$ ,  $P(x) \neq x \forall x \in D^m$  contraddice il **Lemma 4.2.7**, poiché  $P : D^m \rightarrow D^m$  è  $C^\infty$ .  $\square$

<sup>4</sup> $f = \text{Id}_{\partial M}$ .

<sup>5</sup>Notiamo che, poiché  $x \neq g(x) \forall x \in D^m$ ,  $\|x - g(x)\| \neq 0 \forall x \in D^m$ .



## 5.1 Grado mod 2

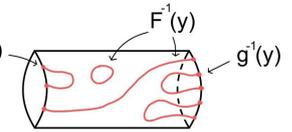
Adesso vogliamo arrivare a mostrare che, se  $M$  è una varietà compatta senza bordo e  $N$  è una varietà connessa tali che  $\dim M = \dim N$ ,  $f : M \rightarrow N$  è una mappa  $C^\infty$  e  $y, y' \in N$  sono valori regolari per  $f$ , allora  $|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(y')| \pmod{2}$  e poi vogliamo definire  $\deg_2 f = |f^{-1}(y)| \pmod{2}$ .

**Definizione 5.1.1.** Date  $M, N$  varietà, due mappe  $C^\infty f, g : M \rightarrow N$  si dicono  **$C^\infty$ -omotope**, se  $\exists F : M \times [0, 1] \rightarrow N$   $C^\infty$  tale che  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x) \forall x \in M$ .

**Lemma 5.1.1 (Omotopia).**

Date  $M, N$  varietà, con  $M$  compatta, tali che  $\dim M = \dim N = m$ , se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$  e  $g$  simultaneamente, allora  $|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  omotopia  $C^\infty$  da  $f$  a  $g$ . Sappiamo che  $\exists V_1 \subseteq N$  aperto intorno di  $y \in N$  tale che  $|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)| \forall y' \in V_1$  e  $\exists V_2 \subseteq N$  analogo intorno di  $y \in N$  tale che  $|g^{-1}(y')| = |g^{-1}(y)| \forall y' \in V_2$ : basta dunque mostrare la tesi per  $f^{-1}(y)$  un punto di  $V_1 \cap V_2$ . Se  $y \in V_1 \cap V_2$  è un valore regolare per  $F$ , allora  $F^{-1}(y)$  è una varietà di dimensione 1 con bordo



$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1]) = F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$$

In conclusione,  $|f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)| = |\partial F^{-1}(y)| \equiv 0 \pmod{2}$ . □

**Definizione 5.1.2.** Date  $M, N$  varietà, un'omotopia  $C^\infty F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tra due diffeomorfismi  $f, g : M \rightarrow N$  si dice **isotopia**, se la mappa  $F_t : M \rightarrow N$   $x \mapsto F(x, t)$  è un diffeomorfismo  $\forall t \in [0, 1]$ .

**Lemma 5.1.2 (Omogeneità).**

Se  $N$  è una varietà connessa e  $y, z \in N$ , allora  $\exists h : N \rightarrow N$  diffeomorfismo tale che

(i)  $h(y) = z$ ;

(ii)  $h$  è isotopo a  $\text{Id}_N$  tramite un'isotopia a supporto compatto:  $\exists K \subseteq N$  compatto tale che  $y, z \in K$  e  $h_t|_{N \setminus K} = \text{Id}_{N \setminus K} \forall t \in [0, 1]$ .

**Definizione 5.1.3.** Il **grado di  $f$  mod 2** è  $\deg_2(f) := |f^{-1}(y)| \pmod{2}$ , con  $y \in N$  valore regolare.

**Teorema 5.1.3.** Date  $M$  varietà compatta e  $N$  connessa tali che  $\dim M = \dim N$ , se  $y, z \in N$  sono valori regolari di  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$ , allora

(i)  $|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \pmod{2}$ ;

(ii) se  $g : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$ -omotopa a  $f$ , allora  $\deg_2(g) = \deg_2(f)$ .

*Dimostrazione.* (i) Per il **Lemma 5.1.2**,  $\exists h : N \rightarrow N$  diffeomorfismo isotopo a  $\text{Id}_N$  tale che  $h(y) = z$ . Se  $y$  è regolare per  $f$ , allora  $z$  è regolare per  $h \circ f$ , dunque

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1] & \xrightarrow{f \times \text{Id}} & N \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & N \\ (x, t) & \mapsto & (f(x), t) & \mapsto & H(f(x), t) \end{array}$$

dove  $H \circ f \times \text{Id}$  è un'omotopia  $C^\infty$  da  $h \circ f$  a  $f$  e  $H$  è un'isotopia da  $h$  a  $\text{Id}_N$ .

Perciò, per il **Lemma 5.1.1**,  $|f^{-1}(z)| \equiv |(h \circ f)^{-1}(z)| \equiv |f^{-1}(y)| \pmod 2$ .

(ii) Siano  $g : M \rightarrow N$   $C^\infty$ -omotopa a  $f$  e  $y \in N$  un valore regolare per  $f$ .

Sotto le attuali ipotesi, l'insieme dei valori regolari di  $f$  è un aperto:  $C = \{\text{punti critici di } f\} \subseteq M$  è chiuso in un compatto, quindi è compatto, dunque  $f(C)$  è compatto in  $N$ , perciò è chiuso e, di conseguenza,  $N \setminus f(C) = \{\text{valori regolari di } f\}$  è aperto. Poiché i valori regolari di  $g$  sono densi in  $N$ ,  $\exists y$  valore regolare sia per  $f$  che per  $g$ , quindi, per il **Lemma 5.1.1**,  $\text{deg}_2(g) = |g^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(y)| \pmod 2 = \text{deg}_2(f)$ .  $\square$

**Esempio 37.**  $\text{Id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$  non è  $C^\infty$ -omotopa alla mappa costante  $c_{x_0} : S^n \rightarrow S^n$   
 $x \mapsto x \qquad \qquad \qquad x \mapsto x_0$

Infatti,  $\text{deg}_2(\text{Id}_{S^n}) = 1 \neq 0 = \text{deg}_2(c_{x_0})$ .

**Definizione 5.1.4.** Si dice che  $y, z \in N$  sono **isotopi**, se  $\exists h : N \rightarrow N$  isotopo a  $\text{Id}_N$  tale che  $h(y) = z$ .

**Osservazione 22.** L'isotopia tra punti è una relazione di equivalenza.

Riflessiva,  $y$  è isotopo a  $y \forall y \in N$ ;

Simmetrica, se  $y$  è isotopo a  $z$ , allora  $z$  è isotopo a  $y$ : se  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  è l'isotopia da  $h$  a  $\text{Id}_N$ , allora

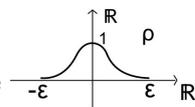
$$\begin{array}{ccc} N \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & N & \xrightarrow{h^{-1}} & N \\ (x, t) & \mapsto & (x, 1-t) & & \end{array} \text{ è l'isotopia da } h^{-1} \text{ a } \text{Id}_N;$$

Transitiva, se  $y$  è isotopo a  $z$  e  $z$  è isotopo a  $w$ , allora  $y$  è isotopo a  $w$ : se  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  è l'isotopia da  $h$  a  $\text{Id}_N$  tale che  $h(y) = z$  e  $G : N \times [0, 1] \rightarrow N$  è l'isotopia da  $g$  a  $\text{Id}_N$  tale che  $g(z) = w$ , allora  $N \times [0, 1] \xrightarrow{H \times \text{Id}} N \times [0, 1] \xrightarrow{G} N$  è l'isotopia da  $g \circ h$  a  $\text{Id}_N$  tale che  $g(h(y)) = w$ .

*Dimostrazione.* (**Lemma 5.1.2**) Poiché  $N$  è connessa, basta mostrare che ogni classe di equivalenza è un aperto di  $N$ . Usando carte locali, si verifica facilmente (per **Esercizio**) che è sufficiente far vedere che  $\forall \delta > 0$  e  $\forall z \in \mathbb{R}^m$  abbastanza vicino a 0  $\exists h_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  isotopia tale che  $h_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$ ,

$$h_t|_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta(0)} = \text{Id}_{\mathbb{R}^m \setminus B_\delta(0)} \text{ e } h_1(0) = z.$$

A meno di sostituire  $h_t$  con  $A \circ h_t \circ A^{-1}$ , dove  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ ,  $A \in \mathcal{O}(n)$  e tale

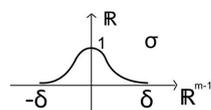


che  $Az = (\|z\|, 0, \dots, 0)$ , basta dimostrare l'affermazione per  $z = (a, 0, \dots, 0)$ .

Prendendo per buona la loro esistenza, siano  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tale che  $0 \leq \rho(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(x) = 0 \forall |x| > \epsilon$  e  $\rho(0) = 1$  e  $\sigma : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tale che  $0 \leq \sigma(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^{m-1}$ ,  $\sigma(x) = 0 \forall \|x\| > \delta$  e  $\sigma(0) = 1$ .



$\left\{ \begin{array}{ccc} h_t : \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (x, y) & \mapsto & (x + t\sigma(y)\rho(x)a, y) \end{array} \right\}_{t \in [0, 1]}$  definisce un'omotopia  $C^\infty$  da  $\text{Id}_{\mathbb{R}^m}$  a  $h_1$  e

$h_1(0) = (a, 0, \dots, 0) = z$ . Fuori da  $\{|x| < \epsilon, \|y\| < \delta\}$   $h_t = \text{Id}_{\mathbb{R}^m} \forall t \in [0, 1]$ . Rimane da verificare che  $\{h_t\}_{t \in [0, 1]}$  è un'isotopia  $\forall a$  sufficientemente piccolo:

- $h_t$  è bigettiva  $\forall t \in [0, 1]$ : infatti, ristretta a ogni retta  $\{y = \text{cost.}\}$ ,  $x \mapsto x + t\sigma(\text{cost.})\rho(x)a$ , se deriviamo rispetto a  $x$ , allora otteniamo  $1 + t\sigma(\text{cost.})\rho'(x)a$  e dunque, se  $|t\sigma(\text{cost.})\rho'(x)a| < 1$ , allora  $h'_t(x) > 0$ . Poiché  $|\rho'(x)|$  è limitata, se  $a$  è abbastanza piccolo, allora la disuguaglianza vale, quindi  $h_t$  è bigettiva ristretta alle rette  $\{y = \text{cost.}\}$  e perciò è globalmente bigettiva;

<sup>1</sup>Ogni  $x \neq x_0$  è valore regolare per  $c_{x_0}$  e  $c_{x_0}^{-1}(x) = \emptyset$ .

- $h_t$  è un diffeomorfismo locale: poiché  $dh_t = \left( \begin{array}{c|c} 1 + t\rho'(x)\sigma(y)a & * \\ \hline 0 & \text{Id} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$  e  $\det(dh_t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ ,

per  $a$  abbastanza piccolo,  $h_t$  è un diffeomorfismo locale e perciò è un diffeomorfismo globale.  $\square$

**Esempio 38** ( $\sim 37$ ).  $\text{Id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$  non è  $C^\infty$ -omotopa alla mappa costante  $\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & x_0 \end{array} \forall x \in S^n$ , perché chiaramente  $\deg_2(\text{Id}_{S^n}) = 1$ , mentre la mappa costante, non essendo suriettiva, ha grado 0.

**Esempio 39.** Se  $A : \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$  è la **mappa antipodale**, allora  $\deg_2(A) = 1$ , perciò questo non ci basta per capire se  $A$  sia  $C^\infty$ -omotopa a  $\text{Id}_{S^n}$  oppure no.

Vedremo che la risposta dipende da  $n$ , ma, per rispondere, dobbiamo “raffinare” la nostra teoria.

## 5.2 Grado (su $\mathbb{Z}$ )

**Definizione 5.2.1.** Dato un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$ , due basi di  $V$   $b = (v_1, \dots, v_n)$  e  $b' = (v'_1, \dots, v'_n)$  definiscono la **stessa orientazione** su  $V$  se e solo se  $b'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_j$ , con  $\det(a_{ij}) > 0$ .

Un’**orientazione** su  $V$  è una classe di equivalenza di basi  $[b]$ . Se  $\dim V = 0$ , allora non ci sono basi e un’orientazione è, per definizione, una scelta tra “+1” e “-1”.

**Osservazione 23.**  $\mathbb{R}^n$  ha una base canonica e quindi un’orientazione canonica che indicheremo  $\mathcal{O}_0$ .

**Osservazione 24.** Un isomorfismo  $L : V \rightarrow V'$  induce una mappa

$$\begin{array}{ccc} \{\text{orientazioni di } V\} & \longrightarrow & \{\text{orientazioni di } V'\} \\ [b] & \longmapsto & [Lb] \end{array} .$$

Infatti, se  $b' = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_j$ , allora  $L(b'_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}L(b_j) \forall i = 1, \dots, n$ .

**Definizione 5.2.2.** Una **varietà orientata**<sup>2</sup> di dimensione  $m$  è una coppia  $(M, \mathcal{O})$ , dove  $M$  è una varietà di dimensione  $m$  e  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$  è una famiglia di orientazioni degli spazi tangenti ( $\mathcal{O}_x$  è l’orientazione di  $\mathcal{T}_x M$ ) tale che  $\forall x \in M \exists g : U \rightarrow g(U) \subseteq M$  parametrizzazione regolare intorno a  $x$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  oppure  $U \subseteq H^m$ , tale che  $dg_u(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_{g(u)} \forall u \in U$ .

Spesso  $g$  è detta **compatibile** con  $\mathcal{O}$ .

**Osservazione 25.** Se  $(M, \mathcal{O})$  è una varietà orientata, allora  $(M, -\mathcal{O})$  è una varietà orientata, dove  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$  e  $-\mathcal{O} = \{-\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$ .

Infatti, possiamo trovare una famiglia di parametrizzazioni locali compatibili con  $\mathcal{O}$  e aventi domini  $U$  tutti uguali a palle centrate nell’origine di  $\mathbb{R}^m$ <sup>3</sup>. Componendo ciascuna parametrizzazione locale di tale famiglia con la restrizione della riflessione  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, -x_m)$ , si ottiene una famiglia di carte compatibili con  $-\mathcal{O}$ .

**Osservazione 26.** Se  $\dim M = 1$  e  $\partial M \neq \emptyset$ , allora la **definizione** di orientazione va modificata. Per esempio, l’argomentazione che, se  $\mathcal{O}$  è un’orientazione su  $M$ , allora anche  $-\mathcal{O}$  è un’orientazione su  $M$  non funziona con la **definizione** che abbiamo dato.

**Definizione 5.2.3.** Se  $M$  è compatta e connessa, con  $\partial M \neq \emptyset$ , allora un’**orientazione** su  $M$  è una famiglia  $\mathcal{O} = \{d\varphi_t(\mathcal{O}_0)\}_{t \in [0, 1]}$ , dove  $\varphi : [0, 1] \xrightarrow{\cong} M$  è un diffeomorfismo.

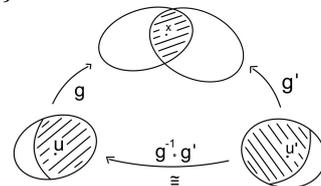
<sup>2</sup> $\partial M \neq \emptyset$  è possibile.

<sup>3</sup>Basta opportunamente comporre con traslazioni e restringere i domini di una qualunque famiglia compatibile con  $\mathcal{O}$ .

**Proposizione 5.2.1.** *Se  $M$  è una varietà connessa (anche con bordo), allora  $M$  ammette al più due orientazioni.*

*Dimostrazione.* Per  $\dim M > 1$ , fissata  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}$  famiglia di orientazioni su  $M$ , si ha che  $\forall \mathcal{O}' = \{\mathcal{O}'_x\}_{x \in M}$  orientazione o  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}'_x$  o  $\mathcal{O}_x = -\mathcal{O}'_x \forall x \in M$ . In altre parole,  $\mathcal{O}'_x \in \{\mathcal{O}_x, -\mathcal{O}_x\}$ .

Poniamo  $A = \{x \in M \mid \mathcal{O}_x = \mathcal{O}'_x\}$  e  $B = \{x \in M \mid \mathcal{O}_x = -\mathcal{O}'_x\}$ . Sicuramente  $A \cup B = M$ . Poiché  $M$  è connessa, basta mostrare che  $A$  e  $B$  sono aperti. Le dimostrazioni per  $A$  e per  $B$  sono simili, quindi vediamo solo quella per  $A$ : per  $x \in A$ , siano  $g : U \rightarrow g(U)$  e  $g' : U' \rightarrow g'(U')$  parametrizzazioni locali compatibili, rispettivamente, con  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$  intorno a  $x$ .



Se  $\mathcal{O}_0 := [\text{base canonica di } \mathbb{R}^m]$ , allora  $dg_u(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_x = {}^4 \mathcal{O}'_x = dg_{u'}(\mathcal{O}_0)$  se e solo se

$$dg_u^{-1} \circ dg_{u'}(\mathcal{O}_0) = d(g^{-1} \circ g')_{u'}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0 \iff \det J(g^{-1} \circ g')_{u'} > 0$$

che rimane vero su un intorno di  $u'$  per continuità, dunque  $\forall v'$  in un intorno di  $u'$   $dg_v^{-1} \circ dg_{v'}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0$ , dove  $v = g^{-1} \circ g'(v') \iff dg_v(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_{g(v)} = \mathcal{O}_{g'(v')} = dg_{v'}(\mathcal{O}_0)$ , perciò  $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}'_y \forall y$  in un intorno di  $x$ , cioè  $A$  è aperto.

Invece, per  $M$  compatta,  $\dim M = 1$  e  $\partial M \neq \emptyset$ , siano  $\{d\varphi_t(\mathcal{O}_0)\}$  e  $\{d\psi_t(\mathcal{O}_0)\}$  due orientazioni date da  $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow M$  diffeomorfismi. Poiché  $\psi^{-1} \circ \varphi : [0, 1] \xrightarrow{\cong} [0, 1]$  ha derivata non nulla ovunque, posto  $\varepsilon := \text{sgn}((\psi^{-1} \circ \varphi)'(t))$ , abbiamo  $d(\psi^{-1} \circ \varphi)_t(\mathcal{O}_0) = \varepsilon \mathcal{O}_0$  se e solo se  $d\varphi_t(\mathcal{O}_0) = \varepsilon d\psi_t(\mathcal{O}_0) \forall t \in [0, 1]$ .  $\square$

**Definizione 5.2.4.**  $M := (M, \mathcal{O})$  e  $-M := (M, -\mathcal{O})$  sono **varietà orientate**.

### 5.2.1 Orientazione indotta sul bordo

Data  $M$  varietà con bordo di dimensione  $m > 1$ , se  $x \in \partial M$ , allora  $\mathcal{T}_x \partial M \subseteq \mathcal{T}_x M$ , dove  $\mathcal{T}_x \partial M$  è un iperpiano di dimensione  $m - 1$  e  $\dim \mathcal{T}_x M = m$ . Un'orientazione su  $M$  determina la scelta di uno dei semispazi di  $\mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \partial M$ : se  $g : U \cap H^m \rightarrow g(U \cap H^m)$  è una parametrizzazione compatibile con l'orientazione, allora  $dg_u(\mathbb{R}^m \setminus \partial H^m) = \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \partial M$  e  $dg_u(H^m \setminus \partial H^m)$  è il semispazio scelto.

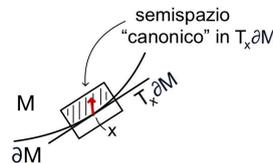
Verifichiamo che non dipende dalla parametrizzazione:

se  $h : V \cap H^m \rightarrow h(V \cap H^m)$  è un'altra parametrizzazione regolare intorno a  $x$  compatibile con l'orientazione e  $h(v) = x$ , allora, a meno di restringere  $U$  e  $V$ ,  $h^{-1} \circ g : U \cap H^m \xrightarrow{\cong} V \cap H^m$  e  $\mathcal{T}_u(U \cap H^m) = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{d(h^{-1} \circ g)_u} \mathcal{T}_v(V \cap H^m) = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$  ha determinante positivo, perché  $g, h$  sono compatibili con l'orientazione.  $d(h^{-1} \circ g)_u$  manda  $\mathbb{R}^{m-1} \cong \mathcal{T}_u \partial H^m$  in  $\mathbb{R}^{m-1} \cong \mathcal{T}_v \partial H^m$ . Se  $h^{-1} \circ g(t, y) = (\phi_1(t, y), \phi_2(t, y))$ , allora  $\frac{\partial \phi_2}{\partial x_m}(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\phi_2(u + \varepsilon e_m) - \phi_2(u)}{\varepsilon} \geq {}^5 0$  e

$$J(h^{-1} \circ g)_u = \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & > 0 \end{array} \right) {}^6$$

dunque  $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m) = H^m$  e perciò  $dg_u(H^m \setminus \partial H^m) = dh_v(H^m \setminus \partial H^m)$ .

**Definizione 5.2.5.** I vettori di  $\mathcal{T}_x \partial M$  nel semispazio "canonico" si dicono **interni**, mentre quelli nel semispazio complementare **esterni**.



**Lemma 5.2.2.** *Data  $M$  varietà orientata di dimensione  $m > 1$  con bordo, se  $x \in \partial M$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  è una base positiva di  $\mathcal{T}_x M$  tale che  $v_1$  è esterno e  $(v_2, \dots, v_m)$  è base di  $\mathcal{T}_x \partial M$ , allora l'orientazione  $[v_2, \dots, v_m]$  indotta su  $\mathcal{T}_x \partial M$  non dipende dalla base scelta.*

*Dimostrazione.* Fissata una parametrizzazione locale  $g : U \cap H^m \rightarrow g(U \cap H^m)$  intorno a  $x$  compatibile con l'orientazione, se  $x = g(u)$  e  $u \in U \cap \partial H^m$ , allora  $dg_u^{-1}(v_1) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$  ha ultima coordinata  $< 0$  e

<sup>4</sup>Poiché  $x \in A$ .

<sup>5</sup> $h^{-1} \circ g$  manda  $U \cap H^m$  in  $V \cap H^m$ .

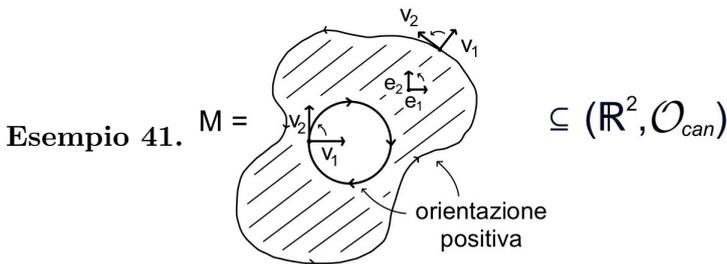
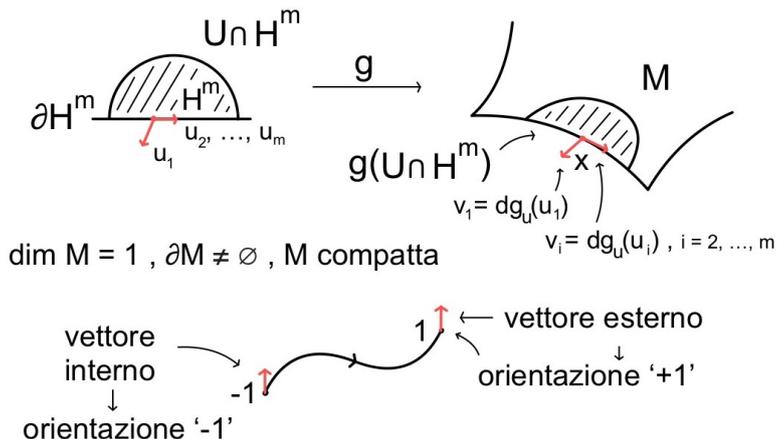
<sup>6</sup> $> 0$ , perché la matrice è non singolare.

$dg_u^{-1}(v_i)$  ce l'ha nulla  $\forall i = 2, \dots, m$ . Se  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$  è un'altra base con le stesse proprietà, la matrice di cambiamento di base è

$$M = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & & & 0 \cdots 0 \\ * & & & A \end{array} \right)$$

con  $\lambda > 0$ , perché le ultime coordinate di  $dg_u^{-1}(v_1)$  e  $dg_u^{-1}(v'_1)$  hanno lo stesso segno. Inoltre,  $\det M > 0$ , perché  $(v_1, \dots, v_m)$  e  $(v'_1, \dots, v'_m)$  sono entrambe positive e  $M$  coincide con la matrice di cambio di base  $(v'_1, \dots, v'_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_m)$ . Quindi  $\det A > 0$  e, poiché  $A$  è la matrice di cambiamento di base  $(v'_2, \dots, v'_m) \rightarrow (v_2, \dots, v_m)$ , si ha la tesi.  $\square$

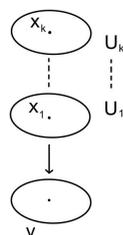
**Esempio 40.** Una base come sopra si ottiene tramite una parametrizzazione locale del tipo



**Esempio 42.** Siano  $D^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  la palla di raggio 1 e  $S^n = \partial D^{n+1}$ . Ogni spazio tangente di  $D^{n+1}$  è identificato con  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dunque  $D^{n+1}$  eredita un'orientazione da  $\mathbb{R}^{n+1}$ , perciò  $D^{n+1}$  è una varietà orientata con bordo e di conseguenza anche  $S^n$  è una varietà orientata.

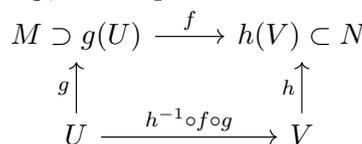
**Definizione 5.2.6.** Una varietà compatta, orientata e senza bordo si dice **chiusa**.

Siano  $f : M \rightarrow N$ , con  $M$  varietà chiusa e  $N$  connessa tali che  $\dim M = \dim N$ , e  $\mathcal{O}^M, \mathcal{O}^N$  le rispettive orientazioni, se  $x \in M$  è un punto regolare per  $f$ , allora  $df_x : \mathcal{T}_x M \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_{f(x)} N$  è un isomorfismo, con  $\text{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(\mathcal{O}_x^M) = \mathcal{O}_{f(x)}^N \\ -1 & \text{se } df_x(\mathcal{O}_x^M) = -\mathcal{O}_{f(x)}^N \end{cases}$ . Se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , allora possiamo definire  $\text{deg}(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x) \in \mathbb{Z}$ .



**Proposizione 5.2.3.**  $\text{deg}(f, y)$  è costante su un intorno di  $y \in N$ .

*Dimostrazione.* Possiamo metterci in una situazione (come a fianco) in cui  $g, h$  sono parametrizzazioni regolari compatibili, rispettivamente, con  $\mathcal{O}^M, \mathcal{O}^N$ .  $\text{sgn}(df_x) > 0 \iff \det J(h^{-1} \circ f \circ g)_u > 0$  che è vero in un intorno di  $u$ , dunque, per il **Lemma della pila di dischi**,  $\text{deg}(f, y') = \text{deg}(f, y) \forall y'$  in un intorno di  $y$ .

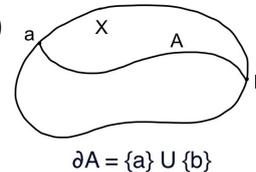


$\square$

**Lemma 5.2.4.** *Date  $X$  varietà compatta, orientata e con bordo,  $N$  varietà connessa e orientata tale che  $\dim X = \dim N + 1$  e  $F : X \rightarrow N$   $C^\infty$ , se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f := F|_{\partial X} : \partial X \rightarrow N$ , allora  $\deg(f, y) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Per la densità dei valori regolari di  $F$  e il fatto che un intorno di  $y$  è composto da valori regolari di  $f$ , possiamo supporre che  $y$  sia valore regolare anche di  $F$ , dunque  $F^{-1}(y)$  è una varietà compatta di dimensione 1 con bordo  $F^{-1}(y) \cap \partial X = f^{-1}(y)$ .

$F^{-1}(y)$  è unione finita di archi e cerchi: sia perciò  $A \subseteq F^{-1}(y)$  uno degli archi.



**Osservazione 27.** *Se  $a, b \in f^{-1}(y)$ , allora  $\text{sgn}(df_a) + \text{sgn}(df_b) = 0$ .*

Fissato un diffeomorfismo  $\varphi : [0, 1] \xrightarrow{\cong} A$  che parametrizza  $A$ , poniamo  $v_1(t) := d\varphi_t(1) \in \mathcal{T}_{\varphi(t)}A$ , con  $1 \in \mathbb{R}$  e  $[1] = \mathcal{O}_0 \forall t \in [0, 1]$ , dunque si ha  $\mathcal{T}_{\varphi(t)}X = \mathcal{T}_{\varphi(t)}A \oplus (\mathcal{T}_{\varphi(t)}A)^\perp$ , dove  $\mathcal{T}_{\varphi(t)}A = \text{Ker}(dF_{\varphi(t)})$  e  $dF_{\varphi(t)}|_{(\mathcal{T}_{\varphi(t)}A)^\perp} : (\mathcal{T}_{\varphi(t)}A)^\perp \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_yN$ .

Fissiamo  $(w_2, \dots, w_m)$  base positiva di  $\mathcal{T}_yN$  e poniamo  $v_2(t) := dF_{\varphi(t)}^{-1}(w_i)$ , con  $i = 2, \dots, m, \forall t \in [0, 1]$ .

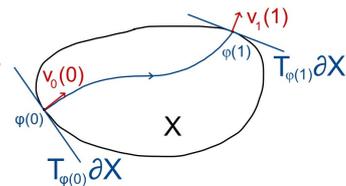
**Osservazione 28.**  *$(v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))$  è una base di  $\mathcal{T}_{\varphi(t)}X$  positiva  $\forall t \in [0, 1]$  o negativa  $\forall t \in [0, 1]$ .*

Infatti, se  $g : U \rightarrow g(U)$  è una parametrizzazione locale compatibile e la base  $dg_u^{-1}(v_i(t))$  è positiva, allora, per continuità,  $dg_u^{-1}(v_i(t'))$  è positiva  $\forall t'$  in un intorno di  $t$ .

Dalla connessione di  $[0, 1]$ , segue l'Osservazione 28.

A meno di cambiare  $\varphi$ , possiamo supporre che  $(v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))$  sia una base positiva di  $\mathcal{T}_{\varphi(t)}X \forall t \in [0, 1]$ .

Osserviamo che  $v_1(0)$  è interno, mentre  $v_1(1)$  è esterno. Fissiamo  $(v'_2, \dots, v'_m)$  base di  $\mathcal{T}_{\varphi(0)}\partial X$  tale che  $(dF_{\varphi(0)}(v'_i))_{i=2}^m$  sia una base positiva di  $\mathcal{T}_yN$ .



La matrice del cambio di base  $(v_1(0), v_2(0), \dots, v_m(0)) \rightarrow (v_1(0), v'_2, \dots, v'_m)$  è  $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ , dove

$\det B > 0$ , perché  $B$  è la matrice di cambio base  $dF_{\varphi(0)}(v_i(0))_{i=2}^m \rightarrow dF_{\varphi(0)}(v'_i)_{i=2}^m$ , entrambe positive in  $\mathcal{T}_yN$ , quindi  $(v_1(0), v'_2, \dots, v'_m)$  è una base positiva di  $\mathcal{T}_{\varphi(0)}X$ , ma  $dF_{\varphi(0)}|_{\mathcal{T}_{\varphi(0)}\partial X} = df_{\varphi(0)}$  e  $f = F|_{\partial X}$ , dunque, poiché  $v_1(0)$  è interno,  $(v'_2, \dots, v'_m)$  è una base negativa di  $\mathcal{T}_{\varphi(0)}\partial X$  e perciò, per costruzione,  $\text{sgn}(df_{\varphi(0)}) = -1$ .

Analogamente, in  $\varphi(1)$ , poiché  $v_1(1)$  è esterno, si ha  $\text{sgn}(df_{\varphi(1)}) = +1$ . Sommando su tutti gli archi, otteniamo  $d(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x) = 0$ . □

Il prossimo Lemma, come il precedente, è analogo a quanto visto in **5.1 Grado mod 2**.

**Lemma 5.2.5.** *Date due varietà orientate  $M$  chiusa e  $N$  connessa tali che  $\dim M = \dim N$  e un'omotopia  $C^\infty F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  tale che  $f(x) := F(x, 0)$  e  $g(x) := F(x, 1) \forall x \in M$ , se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$  e  $g$ , allora  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .*

*Dimostrazione.* La varietà  $[0, 1] \times M$  è un prodotto, perciò, in quanto tale, acquisisce un'orientazione da quelle di  $[0, 1]$  ed  $M$ .

**Esercizio 41** (Costruzione generale). *Se  $V$  e  $V'$  sono due spazi vettoriali con orientazioni  $\mathcal{O} = [b]$  e  $\mathcal{O}' = [b']$ , allora l'orientazione prodotto su  $V \oplus V'$  è  $\mathcal{O} \times \mathcal{O}' := [(b, b')]$ , dove  $(b, b')$  è la giustapposizione delle due basi.*

<sup>7</sup>Se è negativa, vale lo stesso.

Date due varietà  $M$  e  $M'$  con orientazioni  $\mathcal{O}^M$  e  $\mathcal{O}^{M'}$ , poiché  $\mathcal{T}_{(x,x')}(M \times M') = \mathcal{T}_x M \oplus \mathcal{T}_{x'} M'$   $\forall (x, x') \in M \times M'$ , è facile verificare che su  $M \times M'$  è definita un'orientazione "prodotto"  $\mathcal{O}^M \times \mathcal{O}^{M'}$  tale che  $(\mathcal{O}^M \times \mathcal{O}^{M'})_{(x,x')} = \mathcal{O}_x^M \times \mathcal{O}_{x'}^{M'} \forall (x, x') \in M \times M'$ .

Consideriamo quindi  $[0, 1] \times M$  con l'orientazione prodotto di quella canonica su  $[0, 1]$  con quella su  $M$  esistente per ipotesi. Quindi, se  $b$  è una base positiva di  $\mathcal{T}_x M$ , allora  $(1, b)$  è una base positiva di  $\mathcal{T}_{(t,x)}([0, 1] \times M) \forall t \in [0, 1]$ . Inoltre,  $[0, 1] \times M$  è una varietà con bordo  $\partial([0, 1] \times M) = 0 \times M \cup 1 \times M$ . Determiniamo l'orientazione indotta sul bordo:

poiché  $(1, 0) \in \mathcal{T}_{(0,x)}([0, 1] \times M) = \mathcal{T}_0[0, 1] \oplus \mathcal{T}_x M$  è interno e  $(1, 0) \in \mathcal{T}_{(1,x)}([0, 1] \times M) = \mathcal{T}_1[0, 1] \oplus \mathcal{T}_x M$  è esterno, il bordo orientato è  $\partial([0, 1] \times M) = 1 \times M \cup 0 \times (-M)$ .

Per quanto visto,  $\forall y'$  in un intorno di  $y$  abbiamo  $\deg(f, y') = \deg(f, y)$  e  $\deg(g, y') = \deg(g, y)$ , quindi, usando come al solito la densità dei valori regolari, senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $y$  sia un valore regolare per  $F$ , dunque, per il **Lemma 5.2.4**, si ha  $\deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}, y) = 0$ . Poiché  $F|_{0 \times M} = f$  e  $F|_{1 \times M} = g$ , tenendo conto delle orientazioni, abbiamo  $\deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}) = \deg(g, y) - \deg(f, y)$  e quindi  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .  $\square$

Come in **5.1 Grado mod 2**, possiamo dimostrare l'indipendenza di  $\deg(f, y)$  dal valore regolare.

**Teorema 5.2.6.** *Date due varietà orientabili  $M$  chiusa e  $N$  connessa tali che  $\dim M = \dim N$ , se  $f : M \rightarrow N$  è  $C^\infty$  e  $y, z \in N$  sono valori regolari per  $f$ , allora  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$ .*

*Dimostrazione.* Per il **Lemma 5.1.2**,  $\exists h : N \rightarrow N$  diffeomorfismo isotopo a  $\text{Id}_N$  tale che  $h(y) = z$ : consideriamo  $\psi : \begin{matrix} [0, 1] & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ t & \longmapsto & \varepsilon \end{matrix}$ , dove  $(dh_t)_y(\mathcal{O}_y^N) = \varepsilon \mathcal{O}_{h_y(t)}^N$  e  $\{h_t\}$  è l'isotopia. Notiamo che

$$(1) \quad \psi(0) = +1;$$

$$(2) \quad \psi \text{ è localmente costante }^8.$$

Queste due osservazioni e il fatto che  $[0, 1]$  sia connesso implicano  $(dh_t)_y(\mathcal{O}_y^N) = \mathcal{O}_{h_t(y)}^N \forall t \in [0, 1]$ . In particolare,  $dh_y(\mathcal{O}_y^N) = \mathcal{O}_z^N$ , quindi  $\deg(f, y) = \deg(h \circ f, z)$  <sup>9</sup>. D'altra parte,  $z$  è regolare per  $f$  e  $f, h \circ f$  sono  $C^\infty$ -omotope tramite l'omotopia  $\{h_t \circ f\}$ , perciò, per il **Lemma 5.2.5**,  $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$ .  $\square$

**Corollario 5.2.7.** *In virtù del Teorema 5.2.6, data una mappa  $f : M \rightarrow N$  tra varietà (come nell'enunciato), possiamo definire il **grado di  $f$  intero** come  $\deg(f) := \deg(f, y) \in \mathbb{Z}$ , con  $y \in N$  valore regolare.*

**Osservazione 29.** *Per il Lemma 5.2.5, se  $f$  e  $g$  sono  $C^\infty$ -omotope, allora  $\deg(f) = \deg(g)$ .*

**Esempio 43.** *Data  $M$  varietà chiusa e orientata,*

$$1) \text{ se } \begin{matrix} c_{x_0} : M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & x_0 \end{matrix} \text{ è la mappa costante, allora } \deg(c_{x_0}) = 0;$$

$$2) \text{ se } f : M \rightarrow M \text{ è un diffeomorfismo, allora } \deg(f) \in \{\pm 1\}, \text{ in cui } \deg(f) = +1 \text{ se e solo se } df_x(\mathcal{O}_x^M) = \mathcal{O}_{f(x)}^M \forall x \in M.$$

**Corollario 5.2.8.** *Se  $f : M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo tale che  $df_x(\mathcal{O}_x^M) = -\mathcal{O}_x^M$  per qualche  $x \in M$ , allora  $f$  non è  $C^\infty$ -omotopa né a  $\text{Id}_M$  né a una mappa costante.*

**Esempio 44.** *Considerando  $S^1 = \partial D^2 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , calcoliamo  $\deg \left( \begin{matrix} f_k : S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^k \end{matrix} \right)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .*

<sup>8</sup>Si verifica usando parametrizzazioni locali e il solito argomento di continuità col determinante Jacobiano.

<sup>9</sup>Ovviamente  $z$  è un valore regolare per  $h \circ f$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $f_k$  si estende a  $F_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^k$ , è  $C^\infty$  e possiamo calcolare  $(df_k)_1$  usando  $F_k$ ,

con  $1 \in S^1$ . Notiamo che  $\mathcal{T}_1\mathbb{C} = \text{Span}\langle 1, i \rangle \supset \mathcal{T}_1S^1 = \text{Span}\langle i \rangle$ : se  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ , allora  $\gamma'(0) = i$  e

$$(df_k)_1(\gamma'(0)) = (dF_k)_1(i) = \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} F_k(\gamma(\theta)) = \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} e^{ik\theta} = ki$$

cioè  $df_k : \mathcal{T}_1S^1 \rightarrow \mathcal{T}_1S^1$ ,  $z \mapsto kz$  è un isomorfismo se e solo se  $k \neq 0$ .

Se  $k = 0$ , allora  $f_0(z) = z^0 = 1$ , cioè  $f_0$  è costante e  $\text{deg}(f_0) = 0 = k$ .

Supponiamo dunque  $k \neq 0$  e mostriamo che  $1 \in S^1$  è regolare per  $f_k$ : si ha  $f_k^{-1}(1) = \{z \in S^1 \mid z^k = 1\}$ , cioè l'insieme delle radici  $k$ -esime dell'unità. Se  $\zeta \in f_k^{-1}(1)$ , allora  $f_k(\zeta z) = \zeta^k z^k = z^k = f_k(z)$ , cioè la moltiplicazione per  $\zeta \in f_k^{-1}(1)$  è un diffeomorfismo di  $S^1$  isotropo a  $\text{Id}_{S^1} \forall z \in S^1$ , dunque ha grado 1 e  $(df_k)_1 \cdot d(\zeta \cdot^{-1})_\zeta = (df_k)_\zeta$  è un isomorfismo  $\forall \zeta \in f_k^{-1}(1)$ , perciò 1 è un valore regolare per  $f_k$ . Poiché  $\zeta \cdot \simeq \text{Id}_{S^1}$ ,  $\text{sgn}(d(\zeta \cdot^{-1})_\zeta) = +1$  e quindi

$$\text{deg}(f_k) = \text{deg}(f_k, 1) = \sum_{\zeta \in f_k^{-1}(1)} \text{sgn}((df_k)_\zeta) = k \in \mathbb{Z}$$

In particolare, se  $k \neq 0$ , allora  $f_k : S^1 \rightarrow S^1$  NON si estende a una mappa  $D^2 \rightarrow S^1$ . □

Generalizziamo l'Esempio 44.

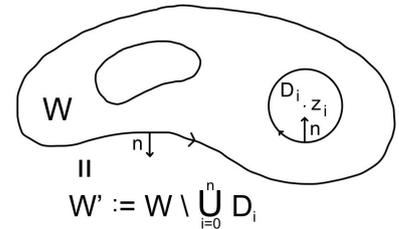
**Proposizione 5.2.9.** *Se  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  è un polinomio a coefficienti complessi e  $W \subseteq \mathbb{C}$  è una regione compatta con bordo liscio sul quale  $p(z)$  non si annulla, allora il grado di  $\frac{p}{|p|} : \partial W \rightarrow S^1$  è pari al numero di radici di  $p(z)$  appartenenti a  $W$  contate con le loro molteplicità.*

*Dimostrazione.* Siano  $z_0, \dots, z_n \in W$  le radici di  $p$  e  $D_0, \dots, D_n \subseteq W$  i dischi disgiunti rispettivamente centrati in tali radici.

Se  $W' = W \setminus \bigcup_{i=0}^n D_i$ , con  $\partial W' = \partial W \cup \bigcup_{i=1}^n \partial D_i$ , allora  $\frac{p}{|p|}$  si estende a  $W'$ .

A causa delle orientazioni,

$$\text{deg} \left( \frac{p}{|p|} \Big|_{\partial W'} \right) = 0 \iff \text{deg} \left( \frac{p}{|p|} \Big|_{\partial W} \right) = \underbrace{\sum_{i=0}^n \text{deg} \left( \frac{p}{|p|} \Big|_{\partial D_i} \right)}_{\substack{\text{molteplicità di } z \\ \text{come radice di } p(z)}}$$



dunque è sufficiente mostrare che, se  $p(z) = (z - z_0)^\ell q(z)$ , con  $q(z_0) \neq 0$  e  $\ell \geq 1$ , e  $D_0$  ha raggio  $r$  abbastanza piccolo da non contenere altre radici di  $p$ , allora  $\text{deg} \left( \frac{p}{|p|} \Big|_{\partial D_0} \right) = \ell$ <sup>10</sup>.

Innanzitutto osserviamo che c'è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione  $g : S^1 \rightarrow \partial D_0$ ,  $z \mapsto z_0 + rz$ ,

quindi  $\text{deg} \left( \frac{p}{|p|} \Big|_{\partial D_0} \right) = \text{deg} \left( \frac{p \circ g}{|p \circ g|} : S^1 \rightarrow S^1 \right)$  e dunque  $\frac{p \circ g}{|p \circ g|}(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + rz)}{|q(z_0 + rz)|}$ .

Se definiamo l'omotopia  $C^\infty S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  ponendo  $h_t(z) := \frac{z^\ell q(z_0 + trz)}{|q(z_0 + trz)|}$ , allora  $h_0(z) = e^{i\theta_0} z^\ell$ , dove  $e^{i\theta_0} = \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|}$  e  $h_1(z) = \frac{p \circ g}{|p \circ g|}(z)$ . Poiché  $e^{i\theta_0} : S^1 \rightarrow S^1$  è un diffeomorfismo isotopo all'identità, ha grado

1 e  $\text{deg} \left( \frac{p \circ g}{|p \circ g|} \right) = \text{deg}(e^{i\theta_0} f_\ell) = \text{deg}(f_\ell) = \ell$ , dove  $f_\ell : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^\ell$  è la mappa dell'Esempio 44. □

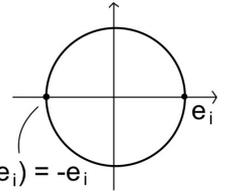
**Esempio 45.** *Data  $\tilde{r}_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\dots, -x_i, \dots)$ <sup>11</sup>, calcoliamo il grado di  $r_i : S^n \rightarrow S^n$ .*

<sup>10</sup>Qui  $\partial D$  è orientato in senso antiorario.

<sup>11</sup>Cioè la mappa che cambia segno all' $i$ -esima coordinata.

*Dimostrazione.*  $r_i$  è un diffeomorfismo, quindi si tratta di capire se conserva oppure inverte l'orientazione di  $S^n$ . Per comodità, controlliamolo nel punto  $e_i = (0, \dots, \frac{1}{i}, \dots, 0) \in S^n$ .

$$\mathcal{T}_{e_i} S^n = \langle e_i \rangle^\perp = \langle -e_i \rangle^\perp = \mathcal{T}_{r_i(e_i)} S^n$$



La mappa  $\tilde{r}_i$  è lineare e ha matrice analoga all'Id, ma con  $-1$  in posizione  $(i, i)$ , quindi  $\det(\tilde{r}_i) = -1$ ,  $d\tilde{r}_i = \tilde{r}_i$  e manda la base  $b = (e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$  di  $\mathcal{T}_{e_i} \mathbb{R}^{n+1} = \text{Span}(e_i) \oplus \mathcal{T}_{e_i} S^n$  in  $b' = (-e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$  di  $\mathcal{T}_{-e_i} \mathbb{R}^{n+1} = \text{Span}(-e_i) \oplus \mathcal{T}_{-e_i} S^n$ , perciò una sola tra  $b$  e  $b'$  induce l'orientazione canonica  $\mathcal{O}_0$  su  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tuttavia  $e_i \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{T}_{e_i} D^{n+1}$  e  $-e_i \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{T}_{-e_i} D^{n+1}$  è anch'esso esterno. Inoltre,  $(dr_i)_{e_i} = d\tilde{r}_i|_{\mathcal{T}_{e_i} S^n} = \tilde{r}_i|_{\text{Span}(e_i)^\perp} = \text{Id}_{\text{Span}(e_i)^\perp}$ , perciò  $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$  non può indurre l'orientazione di bordo sia su  $\mathcal{T}_{e_i} S^n = \text{Span}(e_i)^\perp$  che su  $\mathcal{T}_{-e_i} S^n = \text{Span}(-e_i)^\perp = \text{Span}(e_i)^\perp$ , dunque  $\text{sgn}((dr_i)_{e_i}) = \text{deg}(r_i) = -1$ .  $\square$

**Corollario 5.2.10.** Se  $A : S^n \rightarrow S^n$  è la mappa antipodale, allora  $\text{deg}(A) = (-1)^{n+1}$ .

In particolare, se  $n$  è pari, allora  $A$  non è  $C^\infty$ -omotopa a  $\text{Id}_{S^n}$ .

*Dimostrazione.* Scrivendo  $A = r_{n+1} \circ \dots \circ r_2 \circ r_1$ , si ha  $\text{deg}(A) = (-1)^{n+1}$  (il grado è moltiplicativo).  $\square$

**Definizione 5.2.7.** Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà  $C^\infty$  con o senza bordo, allora un **campo vettoriale (tangente)** su  $M$  è una mappa  $C^\infty v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che  $v(x) \in \mathcal{T}_x M \forall x \in M$ .

Quindi un campo vettoriale tangente su  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è una mappa  $C^\infty v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $v(x) \cdot x = 0 \forall x \in S^n$ .

**Definizione 5.2.8.** Per  $n \geq 1$ , se  $\exists v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  campo vettoriale tangente tale che  $v(x) \neq 0 \forall x \in S^n$ , allora  $S^n$  si dice **pettinabile** (o **parallelizzabile**).

Domanda: per quali  $n \geq 1$  la sfera  $S^n$  è pettinabile?

Risposta parziale: sicuramente, se  $n$  è dispari, allora  $S^n$  è pettinabile. Infatti, il campo tangente

$$v : S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1} \subseteq \mathbb{R}^{2k}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

con  $k \geq 1$ , è liscio e  $v(x) \cdot x = 0 \forall x \in S^{2k-1}$ .

**Proposizione 5.2.11.** Se  $n$  è pari, allora  $S^n$  non è pettinabile.

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un campo vettoriale tangente tale che  $v(x) \neq 0 \forall x \in S^n$ , dunque possiamo definire la mappa  $\bar{v}(x) := \frac{v(x)}{|v(x)|} : S^n \rightarrow S^n$ : chiaramente  $\bar{v}(x) \cdot x = 0 \forall x \in S^n$ .

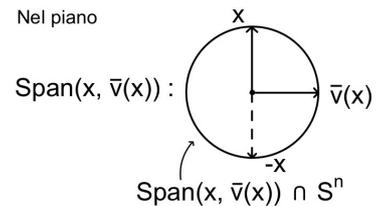
**Osservazione 30.** Usando  $\bar{v}$ , possiamo definire un'omotopia  $C^\infty$  da  $\text{Id}_{S^n}$  a  $A : S^n \rightarrow S^n$ , la mappa antipodale.

Tuttavia,  $\text{deg}(A) = (-1)^{n+1} = -1$ , quindi, per quanto visto, una tale omotopia non può esistere e tale contraddizione implica che il campo  $v$  non può esistere. Dimostriamo perciò l'**Osservazione 30**.

Definiamo l'omotopia  $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  :  
 $(x, t) \mapsto \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\bar{v}(x)$  :  
 ovviamente

$$F(x, t) \cdot F(x, t) = \cos^2(\pi t)x \cdot x + \sin^2(\pi t)\bar{v}(x) \cdot \bar{v}(x) = 1$$

Inoltre,  $F(x, 0) = x$  e  $F(x, 1) = -x \forall x \in S^n$  e chiaramente  $F$  è  $C^\infty$ .  $\square$



### 5.3 Indici di zeri di campi vettoriali

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  un aperto e  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vettoriale (cioè, in particolare, una mappa  $C^\infty$ ). Se  $z \in U$  è tale che  $v(z) = 0$  e  $z$  è uno zero isolato di  $v$ , allora  $\overline{B_\varepsilon(z)}$  non contiene altri zeri di  $v$  oltre  $z$  per

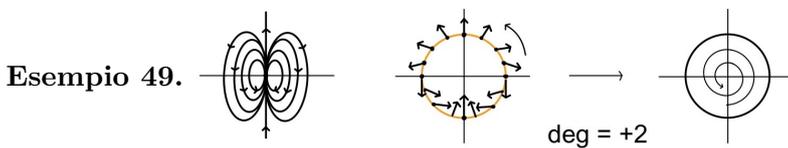
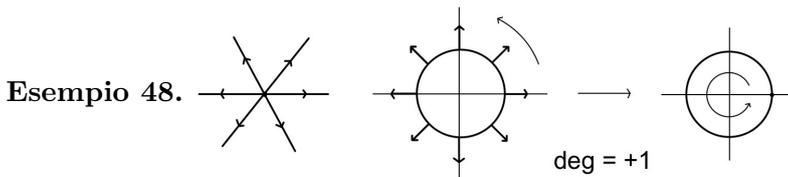
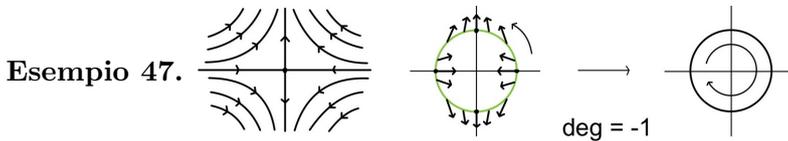
$$\varepsilon > 0 \text{ sufficientemente piccolo e consideriamo la mappa } \begin{matrix} \overline{v}_\varepsilon : \partial B_\varepsilon(z) & \longrightarrow & S^{m-1} = \partial D^m \\ x & \longmapsto & \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{matrix} .$$

**Definizione 5.3.1.** L'indice di  $v$  in  $z$  è  $i(v, z) := \deg(\overline{v}_\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ , dove le sfere  $\partial B_\varepsilon(z)$  e  $S^{m-1}$  sono orientate come bordi dei corrispondenti dischi.

**Osservazione 31.** Se  $\varepsilon > 0$  è piccolo nel senso detto,  $i(v, z)$  non dipende da  $\varepsilon$ .

Notiamo che  $\deg(\overline{v}_\varepsilon) = \deg(\overline{v}_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon)$ , dove  $\psi_\varepsilon : \partial B_1(z) \rightarrow \partial B_\varepsilon(z)$  è il diffeomorfismo che conserva le orientazioni. Infine, se  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  sono sufficientemente piccoli, allora  $\overline{v}_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon'} \circ \psi_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon'}$  definisce un'omotopia  $C^\infty$  da  $\overline{v}_{\varepsilon'} \circ \psi_{\varepsilon'}$  a  $\overline{v}_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon$ , dunque  $\deg(\overline{v}_\varepsilon) = \deg(\overline{v}_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon) = \deg(\overline{v}_{\varepsilon'} \circ \psi_{\varepsilon'}) = \deg(\overline{v}_{\varepsilon'})$ .

**Esempio 46.**  $v_k : U = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è un campo vettoriale con  $0 \in \mathbb{C}$  come unico zero (e dunque è isolato), perciò  $i(v_k, 0) = \deg(v_k|_{\partial B_1(0)}) = k$ .



Siano  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una varietà di dimensione  $m$ ,  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vettoriale tangente e  $z \in M$  uno zero isolato di  $w$ . Data  $g : U \rightarrow g(U) \subseteq M$  una parametrizzazione regolare locale intorno a  $z$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, possiamo definire un campo vettoriale  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ponendo  $\xi(u) := (dg^{-1})_u(w(g(u)))$   $\forall u \in U$ .

**Definizione 5.3.2.** È chiaro che  $g^{-1}(z) \in U$  sia uno zero isolato di  $\xi$ , quindi definiamo l'indice di  $w$  in  $z$  come  $i(w, z) := i(\xi, g^{-1}(z)) \in \mathbb{Z}$ .

**Fatto 5.3.1.**  $i(w, z)$  è ben definito, cioè non dipende dalla parametrizzazione locale intorno a  $z$ .

*Linea della Dimostrazione.* Se  $h : V \rightarrow h(V) \subseteq M$  è un'altra parametrizzazione locale intorno a  $z$ , allora su  $V$  è definito il campo  $\eta(v) = dh_v^{-1}(w(h(v)))$ . Inoltre,  $\varphi = h^{-1} \circ g$  definisce un diffeomorfismo tra un aperto  $U' \subseteq U$  e un aperto  $V' \subseteq V$  contenenti, rispettivamente,  $g^{-1}(z)$  e  $h^{-1}(z)$ . Per di più,  $d\varphi_u(\xi(u)) = \eta(\varphi(u)) \forall u \in U'$ .

La questione si riduce a capire se, dati un diffeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  tra aperti di  $\mathbb{R}^m$  e due campi vettoriali  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  tali che  $u_0 \in U$  è uno zero isolato per  $\xi$ ,  $v_0 \in V$  è uno zero isolato per  $\eta$ ,  $\varphi(u_0) = v_0$  e  $d\varphi_u(\xi(u)) = \eta(\varphi(u)) \forall u \in U$ , allora  $i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$ .

1° passo: si dimostra (per **Esercizio**) che si può supporre  $u_0 = v_0 = 0 \in \mathbb{R}^m$ ;

2° passo: se  $\varphi$  conserva l'orientazione, allora si deforma a  $\text{Id}_U$  tramite una famiglia  $\{\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  di mappe iniettive tali che  $d\varphi_t$  siano isomorfismi. Dunque  $i(d\varphi_t^{-1}(\eta), 0) \in \mathbb{Z}$  è localmente costante, quindi costante e perciò  $i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$ ;

3° passo: se  $\varphi$  non conserva l'orientazione, allora la composizione  $\varphi \circ \rho$  della restrizione di  $\varphi$  con la riflessione  $\rho$  di una palletta intorno a 0 la conserva, quindi vale  $i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$  per  $\rho$  e si conclude usando il fatto che  $\varphi = (\varphi \circ \rho) \circ \rho$ .  $\square$

Data una varietà  $M$  con o senza bordo, la caratteristica di Eulero  $\chi(M)$  è un invariante del suo tipo di omotopia che si definisce nel modo seguente.

**Definizione 5.3.3.** Un  $m$ -simplesso in  $\mathbb{R}^k$ , con  $k \geq m$ , è l'involuppo convesso di  $m+1$  punti affinemente indipendenti  $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^k$ , cioè

$$\Delta^{(m)} = \left\{ t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_m p_m \mid \sum_{i=0}^m t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Una **faccia** di  $\Delta^{(m)}$  è l'involuppo convesso di un sottoinsieme dei punti che lo generano.

Un **complesso simpliciale** è un'unione di simplessi contenuti in  $\mathbb{R}^k$  che si intersecano a due a due in  $\emptyset$  oppure in una faccia.

**Fatto 5.3.2.** Ogni varietà  $M$  è omeomorfa a un complesso simpliciale (finito, se  $M$  è compatta). Se  $M$  è compatta e dunque  $M \cong C$ , con  $C$  complesso simpliciale finito, allora  $\chi(M) := \sum_i (-1)^i S_i(C) \in \mathbb{Z}$ , dove  $S_i(C)$  è il numero di  $i$ -simplessi di  $C$ .

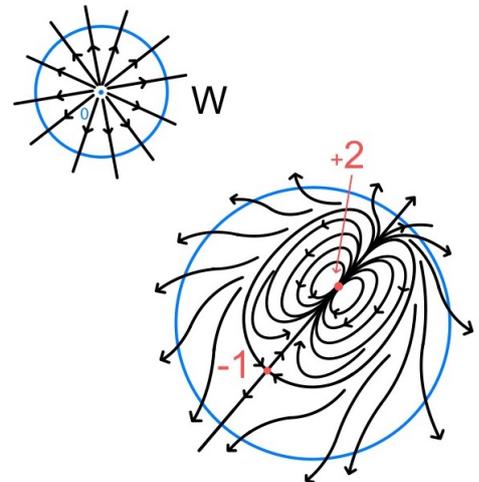
**Fatto 5.3.3.** È una buona definizione e  $\chi(M)$  dipende solo dal tipo di omotopia di  $M$ .

**Teorema 5.3.4 (Poincaré-Hopf).**

Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà compatta con bordo,  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un campo vettoriale tangente con zeri isolati tale che  $w|_{\partial M}$  è esterno  $\forall x \in \partial M$ , allora  $\sum_{z \in w^{-1}(0)} i(w, z) = \chi(M)$ .

**Corollario 5.3.5.**  $\sum_{z \in w^{-1}(0)} i(w, z)$  non dipende dal campo  $w$ .

**Esempio 50.**  $M = D^2$ :  $i(w, 0) = +1 = \chi(D^2)$  e infatti  $\sum_{z \in w^{-1}(0)} i(w, z) = -1 + 2 = +1 = \chi(D^2)$ .

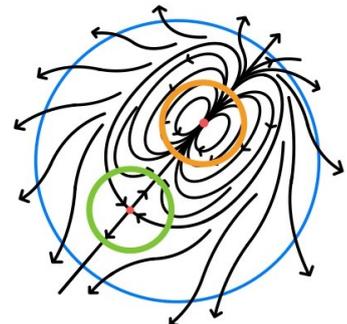


**Lemma 5.3.6 (Hopf).**

Se  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  è una varietà compatta con bordo, con  $\dim X = m$ ,  $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un campo vettoriale con zeri isolati tale che  $v|_{\partial X}$  è esterno  $\forall x \in \partial X$ , allora  $\sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z) = \deg \left( g : \begin{matrix} \partial X & \rightarrow & S^{m-1} \\ x & \mapsto & n_x \end{matrix} \right)$ , dove  $n_x \perp \mathcal{T}_x \partial X$  è la normale esterna unitaria in  $x$ .

*Dimostrazione.* Dette  $\{B_\epsilon(z_i)\}$  le pallette disgiunte intorno agli zeri di  $v$ , consideriamo  $W := X \setminus \bigcup_i B_\epsilon(z_i)$  e  $\partial W = \partial X \cup \bigcup_i (-\partial B_\epsilon(z_i))$ . Se

$\bar{v}(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|} : W \rightarrow S^{m-1}$  è  $C^\infty$ , allora  $\deg(\bar{v}|_{\partial W}) = 0$ . Poiché  $\bar{v}$  è esterno,  $\exists h(x, t) = (1-t)\bar{v}(x) + tg(x)$  omotopia  $C^\infty$  tra  $\bar{v}|_{\partial W}$  e  $g \forall x \in \partial X$ , quindi  $0 = \deg(\bar{v}|_{\partial W}) = \deg(g) - \sum_j i(v, z_j)$ .  $\square$



Useremo il **Lemma di Hopf** per dimostrare il **Corollario del Teorema di Poincaré-Hopf** nel caso particolare in cui gli zeri del campo  $v$  sono di un tipo specifico, detto “non degeneri”.

**Definizione 5.3.4.** Dato un campo vettoriale  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto,  $z \in v^{-1}(0)$  è uno **zero non degenero** per  $v$ , se  $dv_z : T_z U = \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è non singolare.

**Osservazione 32.** Se  $z$  è uno zero non degenero per  $v$ , allora  $v$  ristretto ad un intorno di  $z$  è un diffeomorfismo e dunque  $z$  è uno zero isolato di  $v$ .

**Lemma 5.3.7.** Dato  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, se  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un campo vettoriale e  $z \in U$  è uno zero isolato non degenero, allora  $i(v, z) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dv_z) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dv_z) < 0 \end{cases}$ .

*Linea della Dimostrazione.* Se l'applicazione  $T_{-z} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $u \mapsto u - z$  è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione e  $0 \in U' := T_{-z}(U)$ , allora  $0 \in (v')^{-1}(0)$  è non degenero per  $v'$  e  $U' \xrightarrow[v'=v \circ T_z]{T_z} U \xrightarrow{v} \mathbb{R}^m$   
 $(dv')_0 = d(v \circ T_z)_0 = dv_z \circ T_z$ , dunque  $\text{sgn}(\det(dv')_0) = \text{sgn}(\det(dv_z))$ , perciò possiamo assumere che  $0 \in U$ ,  $\det(dv_u) \neq 0 \forall u \in U$  e  $v : U \xrightarrow{\cong} v(U) \subseteq \mathbb{R}^m$  sia un diffeomorfismo:

- 1° caso: se  $\det(dv_u) > 0 \forall u \in U$ , allora  $v$  è isotopo a  $\text{Id}_U$ , dunque  $i(v, 0) = i(\text{Id}_U, 0) = +1$ ;
- 2° caso: se  $\det(dv_u) < 0 \forall u \in U$ , allora, a meno di restringere  $U$ , possiamo supporre  $U = B_\varepsilon(0)$ . Se  $\rho : B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(0)$  è una riflessione, allora il campo  $v \circ \rho$  conserva l'orientazione, quindi  $\exists \{\phi_t\}$  isotopia tra  $v \circ \rho$  e  $\text{Id}_{B_\varepsilon(0)}$ , perciò  $\{\phi_t \circ \rho\}$  è un'isotopia tra  $v$  e  $\rho$  e dunque  $i(v, 0) = i(\rho, 0) = -1$ .  $\square$

**Lemma 5.3.8.** Data  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  varietà e  $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  campo vettoriale tangente, se  $z_0 \in M$  è uno zero isolato non degenero, allora  $dw_{z_0} : T_{z_0} M \rightarrow T_{z_0} M$  è tale che  $i(w, z_0) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dw_{z_0}) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dw_{z_0}) < 0 \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Se  $h : U \rightarrow h(U)$  è una parametrizzazione regolare locale intorno a  $z_0$ , allora, per  $u \in U$ ,  $v(u) = dh_u^{-1}(w(h(u)))$  è un campo vettoriale “pull-back” di  $w$  su  $U$ . Se  $u_0 = h^{-1}(z_0)$  è uno zero isolato di  $v$  e, per definizione,  $i(w, z_0) = i(v, u_0)$ , allora  $v(u) = \sum_{j=1}^m v_j(u)e_j$ , con  $v_j : U \rightarrow \mathbb{R} C^\infty \forall j = 1, \dots, m$ . Per definizione di  $v$ , abbiamo  $dh_u(v(u)) = w(h(u))$ , quindi, posto  $t_j = dh_{u_0}(e_j)$ ,

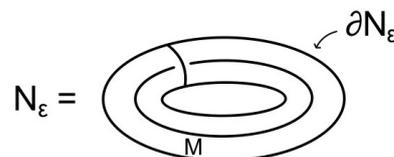
$$\begin{aligned} dw_{z_0}(t_j) &= dw_{z_0}(dh_{u_0}(e_j)) = d(w \circ h)_{u_0}(e_j) = \left. \frac{\partial}{\partial u_j} \right|_{u_0} (w \circ h(u)) = \left. \frac{\partial}{\partial u_j} \right|_{u_0} (dh_u(v(u))) = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial u_j} \right|_{u_0} \left( \sum_{i=1}^m v_i(u) dh_u(e_i) \right) = {}^{12} \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right|_{u_0} \cdot t_j \in T_{z_0} M \end{aligned}$$

dunque  $dw_{z_0}(T_{z_0} M) \subseteq T_{z_0} M$ . Inoltre,  $\det(dw_{z_0}) = \det\left(\left. \frac{\partial v_i(u)}{\partial u_j} \right|_{u_0}\right) = \det(dv_{z_0})$  e, per il **Lemma 5.3.7**, si ottiene la tesi.  $\square$

**Fatto 5.3.9.** Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà chiusa, allora

$$N_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| \leq \varepsilon \text{ per qualche } y \in M\}$$

per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, è una varietà di dimensione  $k$  con bordo. Tale  $N_\varepsilon$  a volte è detto **intorno tubolare** di  $M$ .



<sup>12</sup> $v_i(u_0) = 0 \forall i = 1, \dots, m \iff v(u_0) = 0$ .

**Fatto 5.3.10.** Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà chiusa, allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k \mid v \in (\mathcal{T}_x M)^\perp : \|v\| \leq \varepsilon\} &\longrightarrow N_\varepsilon \\ (x, v) &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

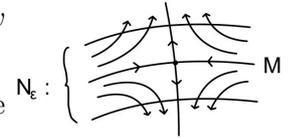
per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, è una bigezione e la mappa  $r : N_\varepsilon \longrightarrow M$   $x + v \longmapsto x$  è  $C^\infty$ .

**Teorema 5.3.11.** Se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà chiusa e  $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$  è un campo vettoriale con zeri non degeneri, allora  $\forall \varepsilon > 0$  abbastanza piccolo

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z) = \deg \left( \begin{array}{ccc} g : \partial N_\varepsilon & \longrightarrow & S^{k-1} \\ x & \longmapsto & n_x \end{array} \right)$$

dove  $n_x$  è la normale esterna unitaria in  $x \in \partial N_\varepsilon$ . In particolare,  $\sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z)$  non dipende da  $v$ .

*Dimostrazione.* Con un'idea come quella a fianco, estendiamo  $v$  ad un campo  $w$  esterno lungo  $\partial N_\varepsilon$  con stessi zeri e indici di  $v$  e applichiamo il **Lemma di Hopf**.



**1° passo** : definiamo la mappa  $C^\infty \varphi : N_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$   $x \longmapsto \|x - r(x)\|^2$  e calcoliamone

il differenziale  $d\varphi$ . Dati  $x \in N_\varepsilon$  e  $v \in \mathcal{T}_x N_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x + tv) - \varphi(x) &= (x + tv - r(x + tv)) \cdot (x + tv - r(x + tv)) - (x - r(x)) \cdot (x - r(x)) = \\ &= \cancel{x} + 2tx \cdot v - 2x \cdot r(x + tv) + t^2 v \cdot v - 2tv \cdot r(x + tv) + r(x + tv)^2 - \cancel{x} + 2x \cdot r(x) - r(x)^2 = \\ &= \underline{2tv \cdot (x - r(x + tv))} + t^2 v \cdot v + r(x + tv)^2 - r(x)^2 + \underline{2x(r(x) - r(x + tv))} \end{aligned}$$

dunque, sottraendo e sommando la quantità  $r(x + tv) \cdot r(x)$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x + tv) - \varphi(x)}{t} &= 2v \cdot (x - r(x + tv)) + tv \cdot v + \frac{r(x + tv) \cdot (r(x + tv) - r(x))}{t} + \\ &+ \frac{r(x)(r(x + tv) - r(x))}{t} + 2x \cdot \frac{r(x) - r(x + tv)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2v \cdot (x - r(x)) + 2(r(x) - x) \cdot dr_x(v) \end{aligned}$$

ma  $dr_x : \mathcal{T}_x N_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{T}_{r(x)} M$ , quindi  $dr_x(v) \in \mathcal{T}_{r(x)} M$ , mentre  $r(x) - x \in \mathcal{T}_{r(x)} M^\perp$ .

Dunque  $(r(x) - x) \cdot dr_x(v) = 0$  e concludiamo che  $d\varphi_x(v) = 2v \cdot (x - r(x))$ .

**2° passo** : se  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà e  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  è  $C^\infty$ , allora  $df_x : \mathcal{T}_x M \longrightarrow \mathbb{R}$  è lineare  $\forall x \in M$ ,

dunque il prodotto Euclideo su  $\mathcal{T}_x M$  identifica  $\mathcal{T}_x M^*$  con  $\mathcal{T}_x M$  e quindi  $M \longrightarrow \mathcal{T}_x M^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_x M$   $x \longmapsto df_x \longmapsto \nabla f_x$

è il **campo gradiente** di  $f$ .

Nel **1° passo** abbiamo calcolato  $\nabla \varphi_x = 2(x - r(x))$  e, per  $x \in \partial N_\varepsilon$ , abbiamo  $g(x) = \frac{\nabla \varphi_x}{\|\nabla \varphi_x\|} = \frac{x - r(x)}{\varepsilon}$ , perché  $\mathcal{T}_x \partial N_\varepsilon = \text{Ker}(d\varphi_x) = (\nabla \varphi_x)^\perp$ .

Definiamo  $w(x) := v(r(x)) + x - r(x) \forall x \in N_\varepsilon$  e notiamo che, se  $x \in \partial N_\varepsilon$ , allora

$$w(x) \cdot g(x) = \underbrace{v(r(x)) \cdot \left( \frac{x - r(x)}{\varepsilon} \right)}_0 + \frac{(x - r(x))(x - r(x))}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon > 0$$

quindi  $w$  è esterno lungo  $\partial N_\varepsilon$ . Poiché  $v(r(x)) \perp (x - r(x)) \forall x \in N_\varepsilon$ ,

$$w(x) = 0 \iff v(r(x)) = 0 \wedge x = r(x) \iff x \in M \wedge v(x) = 0$$

perciò  $w$  ha gli stessi zeri di  $v$ .

3° passo: calcoliamo  $i(w, z)$  per  $z \in v^{-1}(0) \subseteq M$ .

Se  $z \in v^{-1}(0) \subseteq M$  e  $\xi \in \mathcal{T}_x M$ , allora

$$dw_z(\xi) = d(v(r(x)) + x - r(x))_z(\xi) = dv_z \circ \underbrace{dr_z(\xi)}_{\substack{=\xi, \text{ perché} \\ r|_M = \text{Id}_M}} + \underbrace{d(x - r(x))_z(\xi)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ (x-r(x))|_M \equiv 0}} = dv_z(\xi)$$

Se, invece,  $\xi \in (\mathcal{T}_x M)^\perp$ , allora

$$dw_z(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(\overbrace{r(z+t\xi)}^z) - v(\overbrace{r(z)}^z)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z+t\xi - \overbrace{r(z+t\xi)}^z - z + \overbrace{r(z)}^z}{t} = \xi$$

quindi

$$dw_z = \left( \begin{array}{c|c} dv_z & 0 \\ \hline 0 & \text{Id} \end{array} \right) \implies \det(dw_z) = \det(dv_z) \implies i(w, z) = i(v, z)$$

dunque, per il **Lemma di Hopf**,  $\deg(g) = \sum_{z \in w^{-1}(0)} i(w, z) = \sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z)$ . □

**Esempio 51.** Calcoliamo  $\mathcal{X}(S^m)$  usando il **Teorema di Poincaré-Hopf**.

Data  $v : S^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$   
 $x \mapsto p - (p \cdot x) \cdot x$ , con  $p \in S^m$ , se  $x \in S^m$ , allora  $v(x) \cdot x = p \cdot x - p \cdot x = 0$ , dunque  $v$  è un campo vettoriale tangente. Perciò,

$$v(x) = 0 \iff p = (p \cdot x) \cdot x \implies 1 = p \cdot p = (p \cdot x)^2 \implies p \cdot x = \pm 1 \implies x = \pm p \implies v^{-1}(0) = \{\pm p\}$$

Calcoliamo gli indici di  $v$  nei suoi zeri:

$$dv_{\pm p}(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(\overbrace{\pm p + t\xi}^0) - v(\overbrace{\pm p}^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p - (p \cdot (\pm p + t\xi)) \cdot (\pm p + t\xi)}{t} \stackrel{13}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p \mp (\pm p + t\xi)}{t} = \mp \xi$$

dunque  $dv_{\pm p} = \pm \text{Id}_{\mathcal{T}_{\pm p} S^m}$ , perciò  $\pm p$  sono zeri non degeneri tali che

$$i(v, p) = \det(dv_p) = (-1)^m \quad \text{e} \quad i(v, -p) = \det(dv_{-p}) = 1$$

quindi, per il **Teorema di Poincaré-Hopf**,

$$\mathcal{X}(S^m) = \sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z) \stackrel{14}{=} \begin{cases} 2 & m \text{ pari} \\ 0 & m \text{ dispari} \end{cases}$$

<sup>13</sup> $\xi \in (\pm p)^\perp$ .

<sup>14</sup>Seguiva dalla pettinabilità di  $S^m$ .

- Basi concordi, 26
- Bordo, 55
- Campo vettoriale, 36
  - parallelo, 36
  - tangente, 67
- Caratteristica di Eulero, 46
- Carta locale, Sistema di coordinate, 51
- Cerchio osculatore., 10
- Cilindro, 21, 30
- Circonferenza, 3
- Complesso simpliciale, 69
- Cono, 17
- Curva, 3
  - di Frenet, 5
  - p.l.a., 4
  - regolare, 3
  - semplice, chiusa e regolare a tratti, 43
- Curvatura, 5
  - Gaussiana, 27, 28
  - geodetica, normale, 39
  - media, 27
  - normale, principale, 29
- Diffeomorfismo, 51
- Differenziale, 52
- Direzione principale, 29
- Elica, 4
- Elicoide, 14, 21, 30
- Equazioni di Frenet, 6
- Faccia di un semplice, 69
- Funzione
  - di transizione, 17
  - liscia, 51
- Genere di una superficie, 46
- Geodetica, 39, 42
- Grado di una funzione
  - intero, 65
  - mod 2, 59
- Indice, 68
- Intorno tubolare, 70
- Isometria locale, 35
- Isotopia, 59
- Linea di curvatura, asintotica, 42
- Lunghezza d'arco, 3
- Mappa antipodale, 61
- Normale canonica al piano tangente, 17
- Omogeneità, 59
- Omotopia, 59
- Operatore forma, 27
- Orientazione, 26, 61
  - prodotto, 64
- Parametrizzazione
  - locale, 51, 55
  - regolare, 13
  - regolare compatibile, 24
  - regolare conforme, 21
- Pettinabile, Parallelizabile, 67
- Piano
  - affine, 30
  - tangente, 17
- Prima Forma Fondamentale, 20
- Punto
  - critico, regolare, 53
  - ellittico, iperbolico, parabolico, planare, 29
- Regione, 22
  - Area, 22
  - semplicemente connessa, 44
- Retta, 3

- Riferimento di Frenet, 5
- Seconda forma fondamentale, 28
- Semispaio superiore, 55
- Sfera, 14, 30
- Simplesso, 69
- Spazio tangente, 51, 52, 56
- Superficie, 13
  - con bordo, 45
  - di rotazione, 15
  - orientabile, 24
  - piatta, minima, 27
- Toro, 14, 31
- Traccia, 3
- Trasporto parallelo, 37
- Valore
  - critico, 53
  - regolare, 15, 53
- Varietà, 51
  - $C^\infty$ , 51
  - chiusa, 63
  - con bordo, 55
  - orientata, 61
- Velocità, 3
- Versore
  - normale, 24
  - tangente, normale principale, binormale, 5
- Vettore interno, esterno, 62
- Zero non degenerare, 70